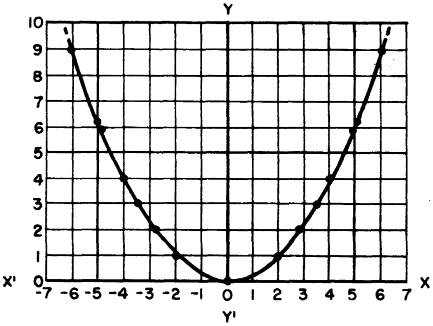
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Manuel Hernández Velasco

MATEMÁTICAS APLICADAS



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS
MEXICO, D. F.
1959

Con toda estimación y afecto, dedico este manual a los Sres:

Dr. José Gómez Robleda

Dr. Alfonso Quiroz y

Lic. Diego López Rosado

M. H. V.

Al Lector.

Matemáticas Aplicadas, nació del deseo de ayudar a RECORDAR, a todos aquellos que en el ejercicio de su profesión o por encontrarse ya en estudios superiores, han olvidado el camino a seguir para la solución de algunos problemas de matemáticas, de diaria aplicación, resultando tedioso o difícil por falta de tiempo, la investigación de ello, en tantos libros especializados, que generalmente son varios y que difícilmente se conservan en las Bibliotecas particulares.

Es verdad que obtenido y memorizado el resultado o fórmula final, el planteo se olvida, siendo éste, en la mayoría de los casos, por los elementos que intervienen en él, de importancia capital para completar el estudio a que se dedica.

PARA ESO, ESTA HECHO ESTE PEQUEÑO MANUAL.

Hernández Velasco

Indice

Matemáticas aplicadas

Algebra

Las operaciones efectuadas algebraicamente, están sujetas a reglas convencionales y arbitrarias, aunque nunca contradictorias.

Signos matemáticos

$+$	más	$\mp$	menos más	$\sqrt{\ }$	raíz
$-$	menos	( ) [ ]	paréntesis	σ	suma de
X	por	$>$	mayor que	∞	infinito
$\div$	entre	$<$	menor que	$:$	es a
$=$	igual a	$\geq$	mayor ó igual a	$\therefore$	como
$\neq$	desigualdad	$\leq$	menor ó igual a	π	3.1416
$\pm$	más menos	%	porciento	log	logaritmo

Ley de los Signos

$+a+a=+2a$, $-2a-a=-3a$ — se suma, el total es positivo o negativo, según sean los signos de los sumandos.

$+2a-a=+a$, $-2a+a=-a$ — se restan y el resultado se afecta del signo de la mayor

$(+a)(+a)=+a^2$, $(-a)(-a)=+a^2$ — en la MULTIPLICACION, signos iguales dan resultados positivos

$(+a)(-a)=-a^2$, $(-a)(+a)=-a^2$ — " " " " contrarios dan resultados negativos

$(+a)\div(+a)=+1$, $(-a)\div(-a)=+1$ — en la DIVISION, signos iguales dan cociente positivo

$(+a)\div(-a)=-1$, $(-a)\div(+1)=-1$ — " " " " contrarios dan cociente negativo

Operaciones algebraicas

CON ENTEROS	CON FRACCIONES
SUMA	
$a+a=2a$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
RESTA	
$a-a=0$	$\frac{a}{b}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bd}{bd}$
MULTIPLICACION	
$a \times b=ab$	$\frac{a}{d}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{dc}$
DIVISION	
$a\div b=\frac{a}{b}$	$\frac{a}{d}\div\frac{b}{c}=\frac{ac}{db}$

Valores diversos

$\frac{a}{a}=1$	$\frac{a}{0}=\infty$, infinito

$a^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$\frac{a}{\infty} = 0$

$\frac{0}{a} = 0$, cero

$\frac{0}{0} = E$, indeterminado

$\sqrt{-1} = i$, imaginario

$2n$ = número PAR

$2n \pm 1$ = número NON

Medias entre a y b

Media ARITMETICA —— $\frac{a+b}{2}$

" GEOMETRICA —— $\sqrt{ab}$

" ARMONICA —— $\frac{2ab}{a+b}$

Expresiones algebraicas

Son las que indican una o más operaciones con LITERALES o NUMEROS y LITERALES.

$3a$, $4a-3b$, ab, $\frac{a+b}{c}$, $X = ab$, son EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Coeficientes

Es un NUMERO o LITERAL colocado a la izquierda de la EXPRESION, e indica el número de veces que ésta debe tomarse como sumando.

En $2a$, 2 es el Coeficiente de $\underline{a}$, e indica que el valor real de $\underline{a}$ debe tomarse como sumando 2 veces, o sea $2a = a + a$

$a+a+a+a\ldots+na$, $\underline{n}$ es el Coeficiente de $\underline{a}$

Exponentes

Son pequeños <u>números</u> o <u>letras</u> colocados arriba y a la derecha de un número o expresión e indica el número de veces que éstos se toman como factor.

$a^2 = a \times a$

$a^3 = a \times a \times a$

$a^n = a \times a \times a \times \ldots a$ $\underline{n}$ veces

Potencias y Raíces

$a^2 \times a = a^3$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^3}{a^2} = a$

$(a^3)^2 = a^6$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = a^{\frac{1}{mn}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Monomios y Polinomios

TERMINO o MONOMIO, son expresiones algebraicas compuestas solamente de factores o divisores

$2a$, $7/9$, $3a/b$, a^2b, son MONOMIOS.

BINOMIOS, TRINOMIOS, ... POLINOMIOS, son expresiones algebraicas que constan de <u>dos</u>, <u>tres</u> o más MONOMIOS separados entre sí por los signos $+$ o $-$

$ab-c$, $a/b-x$, a^3+b^2, son BINOMIOS

$a+b-c$, $a-bc+x$, son TRINOMIOS

$ab+c-d/2+x^2$, $(ab)^2-c+d+x-y$, son POLINOMIOS

Valor Numérico

Toda expresión algebraica, depende del valor numérico obtenido para sus literales.

Tabular una expresión algebraica, es ordenar los valores numéricos obtenidos para las literales.

NINGUNA EXPRESION ALGEBRAICA SE ALTERA SI SE LE SUMA Y RESTA O RESTA Y SUMA, UNA MISMA CANTIDAD.

SI A CANTIDADES IGUALES SE LES MULTIPLICA O DIVIDE POR UN MISMO NUMERO, LOS RESULTADOS SON IGUALES

Fracciones algebraicas

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, suponiendo que $m > n$, m y n cualquier valor

$\frac{8a^2b}{4a\,b} = 2a$, puesto que: 8 entre 4 = 2, a^2 entre $a = a^{2-1} = a$

y b entre $b = 1$

El valor de una fracción NO SE ALTERA si se <u>multiplican</u> o <u>dividen</u> sus dos términos por un mismo número.

$$\frac{(a)(c)}{(b)(c)} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Si tanto el denominador como el numerador de una fracción son divisibles por una misma cantidad, el valor de la fracción no se altera y ésta se ha SIMPLIFICADO.

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

<u>Cociente indicado</u> es cuando no existe expresión entera que exprese exactamente el cociente. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Reducción a un Común Denominador

$\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c} = \frac{ac}{bc}$ y $\frac{ab}{bc}$, cuyo común denominador es bc, resultado de multiplicar el denominador de la segunda expresión por los dos términos de la primera y los dos términos de la segunda por el denominador de la primera.

Cualquier Múltiplo Común de los denominadores, puede ser el denominador común y recibe el nombre de MENOR DENOMINADOR COMUN.

$\frac{p}{ab}$ y $\frac{q}{bc} = \frac{pc}{abc}$ y $\frac{qa}{abc}$, resultado de $c(\frac{p}{ab})$ y $a(\frac{q}{bc})$

Suma y Resta de fracciones algebraicas

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, suma. $\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a-b}{b}$, resta. Cuando los denominadores son iguales, la suma y la resta se efectúan solo [illegible] te con los numeradores.

Cuando los denominadores son diferentes.

$$\frac{5a}{bc}+\frac{3b}{ac}=a\left(\frac{5a}{bc}\right)+b\left(\frac{3b}{ac}\right)=\frac{5a^2}{abc}+\frac{3b^2}{abc}=\frac{5a^2+3b^2}{abc}$$

Multiplicación de fracciones

Se multiplican, numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

cuando:

$$a\left(\frac{b}{c}\right) \quad ó \quad \left(\frac{b}{c}\right)a = \left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{ab}{c}$$

El producto de una fracción por su denominador es igual a su numerador.

$b\left(\frac{a}{b}\right)=a$, puesto que: $\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{ab}{b}=a$ por simplificación

División de fracciones

$\frac{ax}{bc}\div\frac{x}{c}=\frac{axc}{bcx}=\frac{a}{b}$ esto es cuando las fracciones son divisibles, de no serlo, se multiplica la fracción dividendo por el recíproco de la fracción divisor

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{ad}{bc}$, siendo $\frac{d}{c}$ el recíproco de $\frac{c}{d}$

Cuando el producto de dos números o expresiones es igual a la unidad, éstos son RECIPROCOS.

$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$; a y $\frac{1}{a}$, son RECIPROCOS

$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=1$; a/b y b/a, son RECIPROCOS

Ecuaciones

ECUACION ES UNA IGUALDAD EN DONDE EXISTEN UNA O MAS INCOGNITAS.

Resolver una ecuación es encontrar el valor (o los valores de las incógnitas).

IDENTIDAD, es una igualdad para cualquier valor numérico asignado a la literal o a las literales.

RAIZ o SOLUCION, es el valor numérico que satisface la igualdad

$7+a=15$, $a=15-7=8$, la RAIZ de la igualdad anterior es 8 puesto que $8+7=15$

Con $\underline{a}$ y $\underline{b}$, números conocidos y $\underline{x}$ como incógnita pueden formarse los siguientes tipos de ECUACIONES SIMPLES

ECUACIONES		SOLUCION
$x+a=b$	(1)	$x=b-a$
$x-a=b$	(2)	$x=b+a$
$\frac{x}{a}=b$	(3)	$x=ba$
$xa=b$	(4)	$x=\frac{b}{a}$

Cuando un término de una igualdad pasa de un miembro a otro de dicha igualdad, lo hace con signo contrario.

En(1) $x+a=b$, en donde al restar el valor $\underline{a}$ en los dos miembros de la igualdad, se tiene: $x+a-a=b-a$ y como en el primer miembro $a-a=0$, simplificando se tiene:
$x+0=b-a$, o lo que es lo mismo,
$x=b-a$, en donde se observa que el valor $\underline{a}$ afectado del signo + pasa del primer miembro al segundo con el signo −, contrario al signo +.

En(2) $x-a=b$, en donde al sumar el valor $\underline{a}$ a los dos miembros y simplificando se tiene: $x=b-a$

En(3) $\frac{x}{a}=b$, si se multiplica por el valor de a cada uno de los miembros, se tiene:

$\frac{xa}{a}=ba$, de donde simplificando queda;

$x=ba$

En(4) $xa=b$, si se dividen los dos miembros por el valor de a, se tiene:

$\frac{xa}{a}=\frac{b}{a}$, de donde simplificando queda;

$x=\frac{b}{a}$

Paréntesis

No sólo se usa como signo de agrupación, sirve también para indicar que lo contenido en él, es un todo al cual se le aplica la operación que afecte a dicho paréntesis.

$a+(b+c-d)=$ al resultado de $b+c-d$, sumado con a

$a(b-c)=$ a la diferencia $b-c$, multiplicado por a

$(ab)(c-d)=$ al producto ba por la diferencia $c-d$

Números Positivos y Negativos

Los números algebraicos comprenden números POSITIVOS ($+5$, $+2ab$, $+b$), los cuales van precedidos por el signo $+$ y números NEGATIVOS ($-5x$, -3, $-ab$), que van precedidos por el signo $-$.

Todo número cuyo signo se omitió, se le considera POSITIVO.

Todo número positivo es >0

Todo número negativo es <0

De dos números negativos es MAYOR EL DE MENOR VALOR ABSOLUTO.

La suma de dos o más números positivos es POSITIVA.

" " " " " " " negativos es NEGATIVA

La suma de dos números con signos contrarios, es una resta de sus valores absolutos con signo del mayor.

UN NUMERO ES MAYOR QUE OTRO SI SU RESTA ES POSITIVA Y MENOR SI SU RESTA ES NEGATIVA

Ecuaciones con solución negativa

$$x-5=-8$$
$$x=-8+5$$
$$x=-3$$

Binomio de Newton

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots+nab^{n-1}+b^n$$

Suma por diferencias

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Otros Productos y Cocientes notables

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=a+b$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}=a-b$$

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$$

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

Logaritmos (generalidades)

b = BASE	$\log. 1 = 0$
$y = b^x$	$\log. 0 = -\infty$
$x = \log. y$	$\log. b = 1$

PROPIEDADES:

$\log. AB = \log. A + \log. B$, de donde, <u>EL LOGARITMO DE UN PRODUCTO</u> ES IGUAL A LA SUMA DE LOS LOGARITMOS DE LOS FACTORES.

$\log. \frac{A}{B} = \log. A - \log. B$, " " <u>EL LOG. DE UN COCIENTE</u> ES IGUAL AL LOG. DEL DIVIDENDO MENOS EL LOG. DEL DIVISOR

$\log. A^n = n \log. A$, " " <u>EL LOG. DE UNA POTENCIA</u> ES IGUAL AL EXPONENTE DE LA POTENCIA POR EL LOG. DEL NUMERO

$\log. \sqrt[n]{A} = \frac{\log. A}{n}$ " " <u>EL LOG. DE UNA RAIZ</u> ES IGUAL AL LOG. DEL NUMERO DIVIDIDO POR EL INDICE DE LA RAIZ.

LOGARITMOS VULGARES.

$b = 10$

LOGARITMOS HIPERBOLICOS.

$b = e$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = 2.718281828459$$

$\log_{10} e = 0.434294 = M$ (módulo)

$$\frac{1}{\log e} = 2.302585 = \frac{1}{M}$$

$\log_e n = \frac{1}{M} \log_{10} n$ $\qquad$ $\log_{10} n = M \log_e n$

VALORES DE "M" (MODULO)

1	0.434294	6	2.605767
2	0.868589	7	3.040061
3	1.302883	8	3.474356
4	1.737178	9	3.908650
5	2.171472	10	4.342945

Proporciones

<u>ARITMETICA</u>

$a - b = c - d$

<u>GEOMETRICA</u>

$a : b = c : d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$a \times d = b \times c$

$a \pm b : b = c \pm d : c$

CUARTA PROPORCIONAL

$a : b = b : x$

$x = \frac{b^2}{a}$

MEDIA PROPORCIONAL

$a : x = x : b$

$x = \sqrt{ab}$

MEDIA EXTREMA Y RAZON

$a : x = x : a - x$

$x > a - x$

Progresiones

S= suma de los términos

a= primer término

U= último "

n = número de términos

d = Razón o diferencia

q = Razón o cociente

ARITMETICA

Suma de los términos

$S = \frac{a+U}{2} n$

Ultimo término

$U = a + (n-1)d$

GEOMETRICA

Suma de los términos

$S = \frac{Uq - a}{q - 1}$

Ultimo término

$U = aq^{n-1}$

ARMONICA

a,b,c

$a : c = a - b : b - c$

$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ (b, media armónica)

Permutaciones

Número de permutaciones de x objetos entre sí:

$1.2.3\ldots x.$

Número de permutaciones de x objetos tomados n a n:

$N = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$

Combinaciones

Combinaciones de x objetos tomados n a n

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

Ecuaciones de Primer Grado

Son ECUACIONES DE PRIMER GRADO o ECUACIONES LINEALES, con respecto a una INCOGNITA, todas aquellas que no contienen potencias de esa incógnita, superiores a la primera potencia

Ecuación numérica es la que no contiene otra letra que la incógnita.

$4x - 7 + x = 10 - 3x - 1$

en donde reduciendo términos semejantes, se tiene: $5x - 7 = 9 - 3x$

$$5x = 16 - 3x$$
$$8x = 16$$
$$x = \frac{16}{8} = 2$$

Supresión de Denominadores

Si los dos miembros de $\frac{5x}{6} = 8$, se mutiplican por el denominador del primero, se tiene: $\frac{6 \times 5x}{6} = 8 \times 6 = 5x = 48$, por lo tanto:

$$x = \frac{48}{5} = 9.6$$

cuando la ecuación tiene la siguiente forma $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = ab$, resolviéndola se tiene:

$$bx + ax = a^2 b^2 \text{ , de donde ;}$$
$$(a+b)x = a^2 b^2$$
$$x = \frac{a^2 b^2}{a+b}$$

Para suprimir los denominadores de una ecuación, se multiplican ambos miembros de dicha ecuación, por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

En $\frac{x}{2} + \frac{3}{a} - 4 = \frac{1}{a} - \frac{1}{4}$, siendo $4a$ el m.c.m de los denominadores, se tiene:

$$2ax + 12 - 16a = 4 - a$$
$$2ax = -12 + 16a + 4 - a$$
$$2ax = 15a - 8$$
$$x = \frac{15a - 8}{2a}$$

Ecuaciones simultáneas de primer grado

Dos o más ecuaciones son SIMULTANEAS cuando el valor de las incógnitas es igual para todas las ecuaciones.

Eliminación, es el método por el cual, en un sistema de ecuaciones se hace desaparecer una de las incógnitas.

Existen varios sistemas para efectuar la eliminación.

Eliminación por suma, cuando el sistema presenta la siguiente forma:

$$2x + 3y = 36 \text{ ——————— } (1)$$
$$5x - 2y = 14 \text{ ——————— } (2)$$

Se multiplica (1) por el coeficiente de "y", en (2) y (2) por el coeficiente de "y", en (1) y se tiene:

$$4x + 6y = 72$$
$$15x - 6y = 42$$

sumando $19x = 114$

despejando a x $x = \frac{114}{19} = 6$

sustituyendo en (1) por el valor de x, se tiene $12 + 3y = 36$ de donde despejando y, se tiene:

$$3y = 36 - 12$$
$$y = \frac{24}{3} = 8$$

por lo tanto los valores de las incógnitas en (1) y (2), son:

$$x = 6$$
$$y = 8$$

comprobando en (1) $12 + 24 = 36$ y

en (2) $30 - 16 = 14$

Eliminación por resta, cuando el sistema presenta la siguiente forma:

$3x+2y=23$ ____________ (1)
$2x+3y=27$ ____________ (2)

Se multiplica (1) por el coeficiente de "y" en (2) y (2) por el coeficiente de "y" en (1) y se tiene:

$9x+6y=69$ ____________ (1)
$\underline{4x+6y=54}$ ____________ (2)

restando (2) de (1) $5x \quad =15$

despejando a "x" $x=\frac{15}{5}=3$

por lo tanto $x=3$

sustituyendo en (1) a $\underline{x}$ por su valor:

$9+2y=23$

de donde $2y=23-9$

por lo tanto $2y=14$

despejando a "y" $y=\frac{14}{2}=7$

por lo tanto $y=7$

comprobando

$9+14=23$ ____________ (1)
$6+21=27$ ____________ (2)

Eliminación por <u>sustitución</u>, cuando el sistema presenta la siguiente forma:

$3x+7y=22.4$ ____________ (1)
$x-5y=6$ ____________ (2)

despejando una de las incógnitas en función de la otra

$x=6+5y$ ____________ (3)

sustituyendo en (1) por el valor de $\underline{x}$

$3(6+5y)+7y=22.4$

quitando paréntesis $18+15y+7y=22.4$

ordenando $22y=22.4-18$

despejando a "y" $y=\frac{4.4}{22}=0.2$

sustituyendo en (3) $x=6+1$

$x=7$

comprobando:

$21+1.4=22.4$ ____________ (1)
$7-1=6$ ____________ (2)

Eliminación por <u>igualación</u>

$x+3y=7$ ____________ (1)
$x-2y=2$ ____________ (2)

de donde $x=7-3y=2+2y$

$7-2=2y+3y$

$5=5y$

$y=1$

sustituyendo en (1) por el valor de "y"

$x=7-3$

$x=4$

comprobando

$4+3=7$ ____________ (1)
$4-2=2$ ____________ (2)

Ecuaciones Literales

Son aquellas en que una o más de las cantidades conocidas se representan por letras.
En $ax+b=c$, a,b,c, son cantidades conocidas y x es la incógnita.

Suponiendo a $\underline{x}$ como la incógnita en la ecuación $(a+x)(a-x)=(3a-x)x$, se tiene:

$$a^2-x^2=3ax-x^2$$

de donde $\quad a^2=3ax-x^2+x^2$

ordenando $\quad 3ax=a^2$

$$x=\frac{a^2}{3a}=\frac{a}{3}=\frac{1}{3}a$$

Potencia de un Radical

$$(2\sqrt[3]{5^2})^2=(2\times5^{\frac{2}{3}})^2=2^2\times5^{\frac{4}{3}}=4\times5\times5^{\frac{1}{3}}=$$
$$=20\sqrt[3]{5}$$

$$(5\sqrt{x})^3=(5\times x^{\frac{1}{2}})^3=125\,x^{\frac{3}{2}}=125x\,x^{\frac{1}{2}}=125\,x\sqrt{x}$$

Inversamente $\quad (2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$ o sea:

EL CUADRADO DEL PRIMER TERMINO, MAS EL DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO, MAS EL CUADRADO DEL SEGUNDO, es decir:

$$2^2+2(2\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2$$

simplificando $\quad 4+4\sqrt{3}+3$

y efectuando las sumas indicadas, queda $7+4\sqrt{3}$

Ecuaciones con Radical

$$x=3+\sqrt{x^2-45}$$

trasponiendo $\quad x-3=\sqrt{x^2-45}$

elevando al cuadrado $\quad x^2-6x+9=x^2-45$

de donde $\quad x^2-x^2-6x=-45-9$

simplificando $\quad -6x=-54$

por lo tanto $\quad x=\frac{54}{6}=9$

En la ecuación $\quad \sqrt{x-0.1}=\sqrt{x-3.1}+1$

elevando al cuadrado $\quad x-0.1=x-3.1+2\sqrt{x-3.1}+1$

de donde $\quad 2=2\sqrt{x-3.1}$

y de aquí $\quad 1=\sqrt{x-3.1}$

elevando al cuadrado $\quad 1=x-3.1$

de donde $\quad x=3.1+1=4.1$

Ecuaciones de Segundo grado

Son aquellas que reducidas a su más simple expresión, contienen sólo la segunda o segunda y primera potencias de la incógnita.

Toda ecuación de 2° grado puede reducirse a la siguiente forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

En $7x^2+5x=18$ al transformarse en la forma general queda:

$7x^2+5x-18=0$ (en donde $a=7$, $b=5$ y $c=18$), siendo TERMINO INDEPENDIENTE el que no contiene a la incógnita

Ecuación completa de Segundo grado es la que contiene la segunda y primera potencias de la incógnita e incompleta la que sólo contiene la segunda potencia de la incógnita.

$x^2+3x-10=0$, es ecuación de Segundo grado <u>completa</u>.

$\left.\begin{array}{l}x^2-b=0\\x^2+5=0\end{array}\right\}$ son ecuaciones de Segundo grado <u>incompletas</u>.

Ecuaciones de Segundo grado incompletas

En; $\quad 3x^2+12=2x^2+52$

$$3x^2-2x^2=52-12$$
$$x^2=40 \therefore x=\pm\sqrt{40}$$

En $5x^2+15=3x^2+65$

de donde: $5x^2-3x^2=65-15$

$$2x^2=50$$
$$x^2=\frac{50}{2}=25$$
$$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$$

comprobando: $125+15=75+65 \quad \therefore \quad 140\equiv 140$

Ecuaciones de Segundo grado

METODO GENERAL

Puesto que $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$, al binomio x^2+2ax, le falta a^2 que es la mitad de el coeficiente de x, al cuadrado, para ser cuadrado perfecto

Si la ecuación de la forma:

$x^2+2ax=b$, el primer miembro puede hacerse cuadrado perfecto agregando a^2 a los dos miembros, o sea:

$$x^2+2ax-a^2=b+a^2$$

En $x+6x=55$, agregando 3^2 a los dos miembros para hacer al primero, cuadrado perfecto, se tiene:

$$x^2+6x+9=64 \text{ , la cual puede quedar así;}$$
$$(x+3)^2=64$$

por lo tanto extrayendo la raíz cuadrada, se tiene:

$$x+3=8$$

de donde:

$$x=-3\pm 8$$
$$x=5 \text{ ó } -11$$

Verificando:

$$25+30=55$$
$$\text{ó}\begin{cases}(-11)^2+6(-11)=55\\121-66=55\end{cases}$$

Aplicando el mismo método a la ecuación

$$x^2+2ax+a^2=b+a^2$$
$$(x+a)^2=b+a^2$$
$$x+a=\sqrt{b+a^2}$$

por lo tanto $\quad x=a\pm\sqrt{b+a^2}$

Cuando el coeficiente de x es mayor que uno, se dividen por él ambos miembros para obtener la forma general $\boxed{x^2+2ax=b}$

En $2x^2-3x=9$, dividiendo por 2 (coeficiente de x^2), se tiene:

$$x^2-\frac{3}{2}x=\frac{9}{2}$$

agregando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x o sea $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{2}=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$

se tiene: $\quad x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{9}{2}+\frac{9}{16}$

sumando en el segundo miembro: $\quad =\frac{72+9}{16}=\frac{81}{16}$

de donde: $\quad x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{81}{16}$

como el primer miembro de la ecuación es cuadrado perfecto, al extraer raíz cuadrada a los dos miembros, se tiene

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{9}{4}$$
$$\therefore \quad x=\frac{3}{4}\pm\frac{9}{4}$$

por lo tanto; $x=\frac{3+9}{4}=\frac{12}{4}=3$ ó $x=\frac{3-9}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

Ecuaciones literales de Segundo grado

En $x^2+bx=c$

agregando $(\frac{b}{2})^2$, $x^2+bx+\frac{b^2}{4}=c+\frac{b^2}{4}$

extrayendo la raíz cuadrada: $x+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$

$=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4c+b^2}$

de donde: $x=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4c+b^2}$

Fórmula general

Toda ecuación de Segundo grado puede reducirse a la forma:

$ax^2+bx+c=0$, en la cual a, b y c, son cantidades conocidas y de la cual se deduce; $ax^2+bx=-c$, dividiendo por a se tiene:

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ y agregando $(\frac{b}{2a})^2$, queda:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

extrayendo la raíz cuadrada: $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

de donde: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

por lo tanto; LAS RAICES DE TODA ECUACION DE LA FORMA $ax^2+bx+c=0$, SE ENCUENTRAN CON LA FORMULA GENERAL

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cuando $a=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

En la ecuación $2x^2-3x-9=0$, $2=a$, $-3=b$ y $-9=c$

por lo tanto: $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm9}{4}=3$ ó $-\frac{3}{2}$

RELACION ENTRE LAS RAICES Y LOS COEFICIENTES EN LAS ECUACIONES DE LA FORMA $x^2+bx+c=0$

Siendo x_1 y x_2 las dos raíces

cuando x_1+x_2 $x+x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-2b}{2}=-b$

cuando x_1x_2 $x_1x_2=\frac{b^2-(b^2-4c)}{4}=\frac{b^2-b^2-4c}{4}=c$

de donde: LA SUMA DE LAS RAICES ES IGUAL AL COEFICIENTE DE x CON SIGNO CONTRARIO Y EL PRODUCTO DE LAS RAICES ES IGUAL AL TERMINO INDEPENDIENTE

DISCRIMINANTE:

cuando $b^2-4ac>0$, las raíces son reales y desiguales

$b^2-4ac=0$, " " " " e iguales

$b^2-4ac<0$, las raíces son imaginarias

Formas especiales

$x^{2n}+2x^n-15=0$, despejando x^n

$$x^n=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=3 \text{ ó } -5$$

$$\therefore\ x=\sqrt[n]{3} \text{ ó } \sqrt[n]{-5}$$

$$2x^{\frac{2m}{n}}-17x^{\frac{m}{n}}+35=0$$

$$x^{\frac{m}{n}}=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4.2.35}}{2.2}=\frac{17\pm\sqrt{289-280}}{4}$$

$$=\frac{17\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{17\pm 3}{4}$$

$$=5 \text{ ó } 3\tfrac{1}{2}$$

elevando las raíces a $\frac{n}{m}$

$$x=5^{\frac{n}{m}} \text{ ó } (3\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{m}}$$

$$(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$$

despejando x^2+2x

$$x^2+2x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=3 \text{ ó } -1$$

por lo tanto: $x^2+2x=3$, $x^2+2x=-1$
de donde, la primera ecuación, $x=-3$ ó 1
y la segunda $x=-1$ ó -1

En $x^{-2}-3x^{-1}-4=0$, que es de segundo grado en x^{-1}
despejando a x^{-1}, se tiene
$x^{-1}=-4$ ó -1, puesto que $1/x=-4$ o 1
por lo tanto $x=1/4$ o -1
En general; TODA ECUACION DE LA FORMA

$$ax^{2n}+bx^n+c=0, \text{ PUEDE ESCRIBIRSE ASI:}$$

$$a(x^n)^2+bx^n+c=0$$

considerando x^n como incógnita, su valor se encuentra por la fórmula general y el de x al extraer la raíz n

Raíces extrañas

Algunas veces por causa de ciertas transformaciones efectuadas en una ecuación, se obtienen raíces que satisfacen las ecuaciones transformadas pero no la propuesta.

Si se eleva al cuadrado $x-2=5$, se tiene:
$x^2-4x+4=25$
de donde: $x=7$ ó -3
la raíz 7, satisface la ecuación propuesta, no así $-3-2=-5$ que no es igual a 5, por lo tanto -3 es una RAIZ EXTRAÑA.

Cuando LOS DOS MIEMBROS DE UNA ECUACION SE ELEVAN A UNA POTENCIA, SE AUMENTA EL NUMERO DE LAS RAICES y probablemente alguna de ellas no satisface a la ecuación.

La multiplicación de ambos miembros de una ecuación por una función de la incógnita, puede introducir raíces extrañas.

COMUNMENTE LA SUPRESION DE DENOMINADORES NO INTRODUCE RAICES EXTRAÑAS.

Ecuaciones

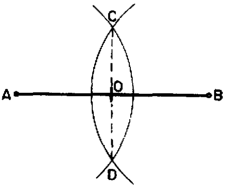
FORMULAS GENERALES

PLANTEO	SOLUCION
De Primer grado con una incógnita	
$x+a=b$	$x=b-a$
$x-a=b$	$x=b+a$
$ax=b$	$x=\frac{b}{a}$
$\frac{m}{n}x=a$	$x=a\frac{n}{m}$
$ax+b=c$	$x=\frac{c-b}{a}$
De Primer grado con dos incógnitas (simultáneas)	
$ax+by=c$	$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$
$a'x+b'y=c'$	$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$
De Segundo grado incompletas	
$x^2=a$	$x=\pm\sqrt{a}$
$ax^2+b=c$	$x=\pm\sqrt{\frac{c-b}{a}}$
De Segundo grado completas	
cuando $a=1$ $\quad x^2+bx+c=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$
$ax^2+bx-c=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Geometría

Soluciones gráficas

DIVIDIR UNA RECTA EN DOS PARTES IGUALES.



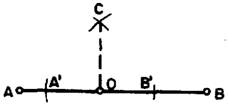
Sea AB la recta.

Con radio mayor que la mitad de la recta y centro en A y B respectivamente, se trazan los arcos que al cruzarse determinan los puntos C y D.

La recta CD divide a la recta AB en el punto O en dos partes iguales.

De donde AO = OB

TRAZAR UNA PERPENDICULAR A AB, SOBRE EL PUNTO O CONTENIDO EN AB.

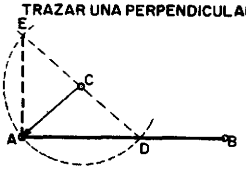


Con centro en O y radio cualquiera, se trazan las intersecciones A' B'.

Con centro en A' y B' respectivamente, se traza la intersección C.

Uniendo C con O se obtiene la perpendicular pedida.

TRAZAR UNA PERPENDICULAR EN CUALQUIERA DE LOS EXTREMOS DE AB.

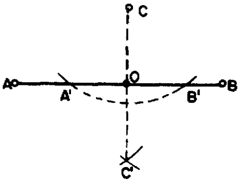


Por el punto C exterior a AB y radio CA, se traza el arco DAE.

Uniendo D con C y prolongando hasta cortar el arco, se obtiene el punto E.

La recta EA, es perpendicular en A, a la recta AB.

TRAZAR UNA PERPENDICULAR A AB DESDE C.

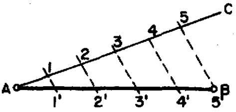


Con centro en C, se traza el arco A'B'

Con centro en A' y B' respectivamente, se traza la intersección C'

Uniendo C con C' se obtiene CO que es la perpendicular pedida.

DIVIDIR AB EN n PARTES IGUALES.

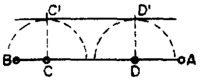


Se trazan a partir de A, AC con un ángulo cualquiera y se fijan sobre ella las n partes iguales deseadas

El último punto sobre AC, se une con B

Paralelas a 5B son las restantes uniones las cuales dividen a AB en las partes deseadas.

TRAZAR UNA PARALELA A AB.



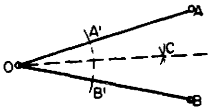
Se toman C y D, contenidos en AB.

Con radio igual a la distancia entre las paralelas se trazan arcos con centros en C y D.

Se levantan perpendiculares en C y D que corten a los arcos en C' D'.

Uniendo C' con D', se obtiene la paralela a AB, pedida.

DIVIDIR UN ANGULO CUALQUIERA EN DOS PARTES IGUALES. (BISECTAR)

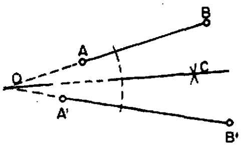


Con centro en O, vertice del ángulo y con radio cualquiera se traza el arco A' B'.

Con centro en A' y B', se traza la intersección C.

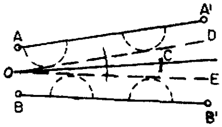
La recta OC, divide al ángulo AOB en dos partes iguales.

DIVIDIR EL ESPACIO COMPRENDIDO ENTRE DOS RECTAS NO PARALELAS, EN DOS PARTES IGUALES. _1a SOLUCION.



De ser posible, se prolongan los lados hasta formar el vértice O del ángulo AOA' y se sigue el procedimiento anterior.

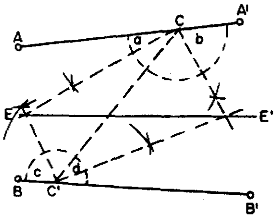
2a SOLUCION.



Cuando no es posible prolongar los lados se hacen las paralelas OD y OE que forman el ángulo DOE.

La línea OC, divide el espacio comprendido entre AA' y BB', en dos partes iguales.

3a SOLUCION.

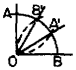


Cuando el espacio comprendido entre las rectas es grande, se traza CC' arbitrariamente y los ángulos que forma con AA' y BB', se bisectan.

El cruce de las bisectrices de los ángulos a y c, determina el punto E y el de las de b y d, determina el punto E'

La recta EE', divide en dos partes iguales al espacio entre AA' y BB'

DIVIDIR UN ANGULO RECTO EN TRES PARTES IGUALES

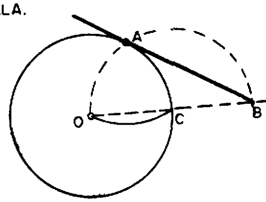


Con radio cualquiera y centro en O, se traza el arco AB.

Con centro en A y B respectivamente se trazan los arcos OA' y OB'.

Uniendo O y B' y O y A', queda dividido el ángulo en 3 partes iguales.

TRAZAR LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA, POR A, PUNTO DADO SOBRE ELLA.



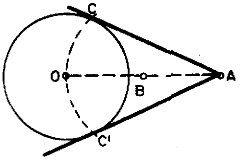
Con centro en A y radio AO, se traza el arco OC.

Con una recta, se unen O y C, prolongándola.

Con centro en C y radio CO, se traza el arco OAB

Uniendo A y B se tiene la tangente pedida.

POR A, PUNTO FUERA DE LA CIRCUNFERENCIA, TRAZAR DOS TANGENTES A ELLA.

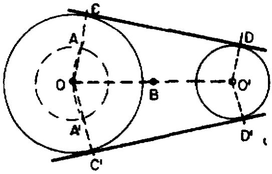


Se unen O y A y se hace B = 1/2 de OA

Con centro en B y radio BO se traza el arco CC'

Uniendo C con A y C' con A, se obtienen las dos tangentes pedidas

TRAZAR LAS TANGENTES EXTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS.



Se unen los centros de las circunferencias y se localiza el punto B a 1/2 de OO'.

Se traza con centro en O, una circunferencia auxiliar cuyo radio sea igual al radio de la circunferencia menor.

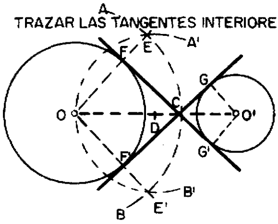
Con centro en B y radio BO se corta a la circunferencia auxiliar en A y A'.

Se unen OA y OA' y se prolongan hasta que corten a la circunferencia exterior en C y C'.

Los radios O'D y O'D', se hacen paralelos a los radios OC y OC'

Uniendo CD y C'D', se tienen las tangentes pedidas.

TRAZAR LAS TANGENTES INTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS



Con centro en O y radio igual a la suma de los dos radios de las circunferencias, se traza el arco ACB.

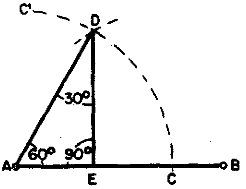
Con centro en D, punto medio entre O y O' y radio DO, se traza el arco A'OB'.

Las rectas OE y OE', determinan los puntos F y F'.

Se hacen paralelas OF' con O'G y OF con O'G'.

Uniendo los puntos F y G' y F'G, se tienen las tangentes pedidas.

CONSTRUCCION DE UN TRIANGULO CON ANGULOS DE 30°, 60° y 90°



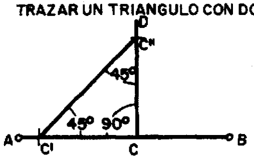
Con centro en A y radio cualquiera AC, se traza el arco CC'.

Con centro en C e igual radio, se traza la intersección D.

Uniendo A con D y bajando la perpendicular DE, se obtiene el triángulo ADE, cuyos valores angulares son:

∠ A = 60º
∠ D = 30º
∠ E = 90º

TRAZAR UN TRIANGULO CON DOS DE SUS ANGULOS A 45º.



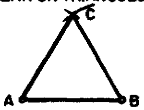
Sobre AB, se toma una magnitud cualquiera CC' y por C se levanta la perpendicular CD.

Con centro en C y radio CC' se traza la intersección C" sobre CD.

Uniendo C' con C", se obtiene el triángulo CC'C", cuyos valores angulares son:

∠C = 90º
∠C' = 45º
∠C" = 45º

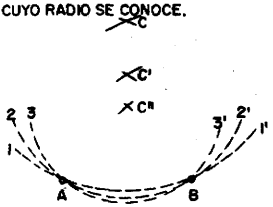
TRAZAR UN TRIANGULO EQUILATERO.



Con centro en A y B y radio AB (igual a la base del triángulo pedido), se traza la intersección C.

Uniendo A con C y B con C, se obtiene el triángulo pedido.

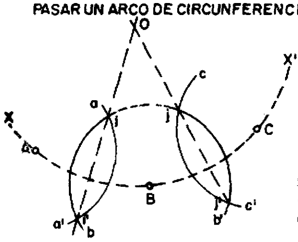
ENCONTRAR EL CENTRO DEL CIRCULO QUE PASA POR DOS PUNTOS DADOS, Y CUYO RADIO SE CONOCE.



Con centro en los puntos A y B respectivamente y radio igual al conocido, se traza una intersección que es el centro buscado.

En el ejemplo se observa que por A y B, *pueden pasar infinito número de círculos.*

PASAR UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA POR TRES PUNTOS DADOS.



Con centro en A y radio mayor que la mitad *de la distancia entre* A y B, se traza el arco aa'.

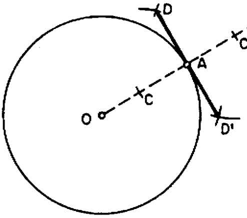
Con centro en B, se traza el arco bb'.

Con centro en C, se traza el arco cc'.

Tanto el arco bb', como el arco cc', tienen el mismo radio que el arco aa'.

Uniendo las intersecciones ii' y jj' y prolongándolas hasta que se corten, determinan el punto O que es el centro del arco XX', el cual tiene por radio la distancia OA.

TRAZAR UNA TANGENTE SOBRE UN PUNTO DADO EN UNA CIRCUNFERENCIA.



Se traza OB, pasando por A

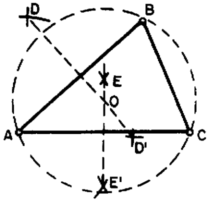
Con centro en A y radio cualquiera se trazan las intersecciones C y C'.

Con centro en C y C' y radio mayor que CA, se trazan las intersecciones D y D'.

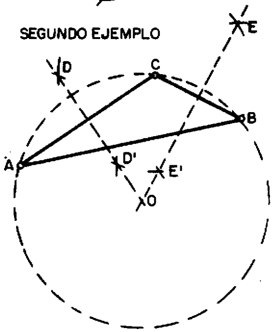
Uniendo D, A y D', se tiene la tangente pedida.

CIRCUNSCRIBIR UNA CIRCUNFERENCIA A UN TRIANGULO CUALQUIERA

PRIMER EJEMPLO



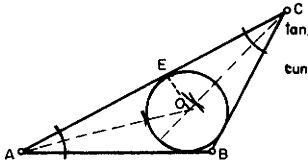
SEGUNDO EJEMPLO



Se levantan las perpendiculares a AB y AC

El punto O, intersección de las perpendiculares, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, con radio OA.

INSCRIBIR UNA CIRCUNFERENCIA EN UN TRIANGULO.



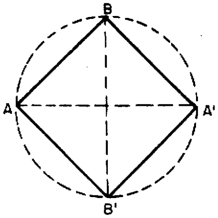
Se trazan las bisectrices de los ángulos A y B.

Por O (punto donde las bisectrices se cortan), se baja la perpendicular OE.

Con centro en O y radio OE, se traza la circunferencia inscrita en el triángulo.

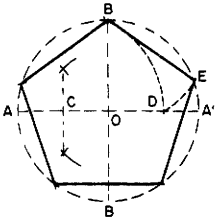
POLIGONOS REGULARES INSCRITOS

INSCRIBIR UN CUADRADO EN UNA CIRCUNFERENCIA.



Se trazan los diámetros AA' y BB', perpendiculares entre sí y se unen con cuerdas, los puntos AB, BA', A'B' y B'A, quedando construído el cuadrado pedido.

INSCRIBIR UN PENTAGONO REGULAR EN UNA CIRCUNFERENCIA.



Se trazan los diámetros AA' y BB'.

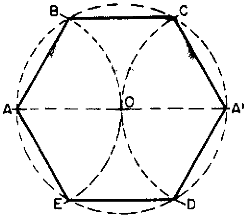
Se hace AC=1/2 del radio AO.

Con centro en C y radio CB, se traza el arco BD.

Con centro en B y radio BD, se traza el arco DE.

La cuerda BE, es el lado del pentágono pedido.

INSCRIBIR UN HEXAGONO REGULAR EN UNA CIRCUNFERENCIA.

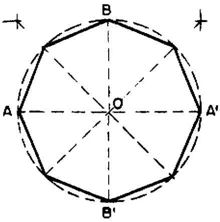


Se traza el diámetro AA'

Con centro en A y A' y radio OA (de la circunferencia), se trazan los arcos BE y CD.

Uniendo las intersecciones BC, CA', A'D, DE, EA y AB, se obtiene el hexágono pedido.

INSCRIBIR UN OCTAGONO REGULAR EN UNA CIRCUNFERENCIA



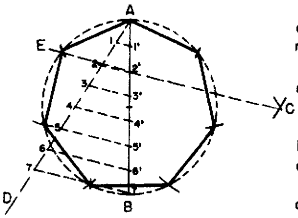
Se trazan los diámetros AA' y BB', perpendiculares entre sí y se bisectan los cuatro ángulos formados en O.

Uniendo los puntos de intersección de los diámetros obtenidos, con la circunferencia, se obtiene el octágono pedido.

En general; para inscribir un polígono regular de n número de lados, se sigue el siguiente procedimiento que, resuelto con la propiedad debida, da él o los problemas propuestos con la máxima rapidéz y el mínimo de error. Se llama:

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA INSCRIBIR CUALQUIER POLIGONO EN UNA

CIRCUNFERENCIA DADA.



Se traza el diámetro AB y con radio igual a dicho diámetro y centro en A y B respectivamente, se traza la intersección C.

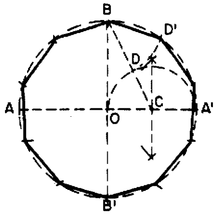
Se divide AB en tantas partes iguales como lados deba tener el polígono.

La segunda división del diámetro AB a partir de A o de B, indistintamente, se une con la intersección C y se prolonga hasta que corte a la circunferencia en E.

La cuerda AE, es el lado del polígono pedido.

El éxito de este método depende del cuidado con que se realice.

INSCRIBIR UN DECAGONO EN UNA CIRCUNFERENCIA.



Se trazan AA' y BB', perpendiculares entre sí.

Se hace OC=1/2 OA.

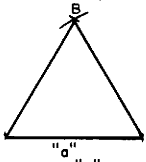
Con radio CO y centro en C, se traza la semicircunferencia OA'.

Se unen B y C y por B con radio BD se traza el arco DD'.

La cuerda BD', es el lado del polígono pedido.

CONSTRUCCION DE POLIGONOS DADO UNO DE SUS LADOS.

DADO EL LADO "a", CONSTRUIR UN TRIANGULO EQUILATERO



Con centro en los extremos de "a" y radio igual a dicho lado, se traza la intersección B.

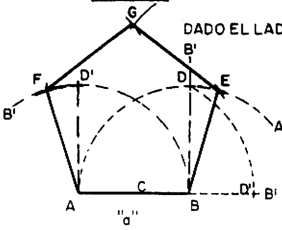
Se une B con los extremos de "a" y se obtiene el triángulo equilátero pedido.

DADO EL LADO "a", CONSTRUIR UN CUADRADO PERFECTO.

Por los extremos de "a", se levantan perpendiculares con magnitud igual con "a"

Se hace la paralela a "a" y se obtiene el cuadrado pedido.

DADO EL LADO "a", CONSTRUIR UN PENTAGONO REGULAR.



A y B, extremos de "a".

Por B se hace la perpendicular BB'.

Con centro en B y radio BA, se traza el arco AA' que corta a BB' en D

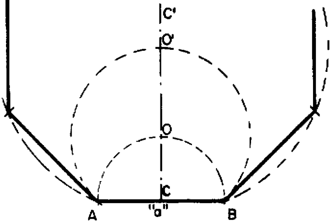
Con centro en C, punto medio de AB, y radio CD, se traza el arco DD' que corta a BB', prolongación de AB, en D'

Con centro en A y radio AD', se traza la intersección E

Uniendo B con E, se obtiene el segundo lado del polígono.

Con centro en A y radio AC, se traza el arco BB'
Por A, se levanta una perpendicular que corta a BB'en D'
Con centro en D' y radio DE, se hace la intersección F.
Con centro en F y E respectivamente y radio AB, se traza la intersección G
Uniendo A con F, F con G, G con E y E con B, se obtiene el polígono pedido.

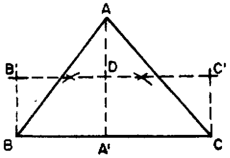
CONSTRUIR UN OCTAGONO REGULAR DADO EL LADO "a"



Por el punto medio de AB, se levanta la perpendicular CC'.
Con centro en C y radio CA, se traza la semicircunferencia AOB.
Con centro en O y radio OA, se traza el arco AO'B
El punto O' sobre la perpendicular CC' es el centro de la circunferencia que inscribe al polígono pedido

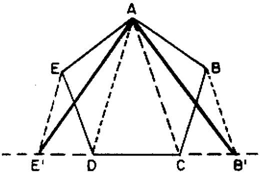
SUPERFICIES EQUIVALENTES.

CONSTRUCCION DE UN RECTANGULO EQUIVALENTE AL TRIANGULO DADO ABC



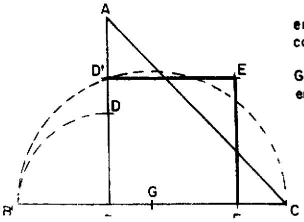
Por A, se baja la perpendicular AA' y se hace D = 1/2 de AA'
Por D, se traza una paralela a BC y por B y C, respectivamente, se levantan perpendiculares que corten a ésta en B' y C'
El rectángulo BB'C'C obtenido, es equivalente al triángulo ABC, dado.

CONSTRUIR UN TRIANGULO EQUIVALENTE AL POLIGONO ABCDE.



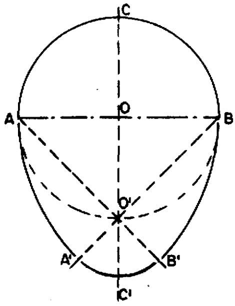
Se une A con D y C respectivamente.
Se prolonga en las dos direcciones el lado CD.
Por E se traza EE' paralela a AD.
Por B se traza BB' paralela a AC.
El triángulo AB'E', es equivalente al polígono dado.

DADO EL TRIANGULO ABC, CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE.



Se hace AD = 1/2 de AB y con centro en B y radio BD, se traza el arco DB' que corta en B' a la prolongación de CB
Se hace B'G = 1/2 de B'C y con radio GB' se traza el arco B'D'C que corta a AB en D'
BD', es el lado del cuadrado pedido.

TRAZO DE UN HUEVO, DADO SU EJE MENOR.



AOB=eje menor con centro en O.

CC', Perpendicular a AOB, pasando por O.

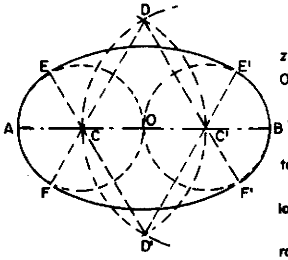
Con centro en O y radio OA, se traza la circunferencia que corta a CC' en O'

Se unen A con O' y se prolonga y B con O' y se prolonga.

Con radio AB y centro en A y B respectivamente se trazan los arcos AA' y BB'.

Con centro en O' y radio O'A', se traza el arco A'B', que completa el huevo pedido

DADO EL EJE MAYOR AB, CONSTRUIR UN OVOIDE.



Se divide AB en cuatro partes iguales.

Con centro en C y C' y radio AC, se trazan las circunferencias que son tangentes en O.

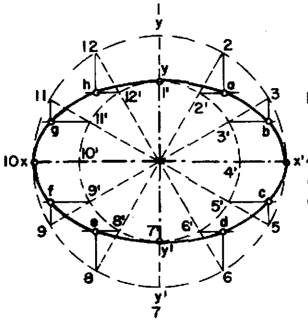
Con radio CC' y centro en C y C' respectivamente se trazan las intersecciones D y D'

Se unen D y C y D y C', prolongándose hasta encontrar a las circunferencias en F y F'

En igual forma, a partir de D' se localizan los puntos E y E'.

Con centro en D y D' respectivamente y radio DF. se hacen los arcos EE' y FF', que completan el trazo del ovoide pedido.

CONSTRUIR UNA ELIPSE, DADOS SUS DOS EJES METODO DE PUNTOS.



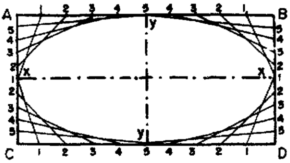
Con centro en el cruce O de los ejes y radios iguales a los semiejes, se trazan las dos circunferencias.

Se dividen las circunferencias en n partes iguales. (en el ejemplo, 12 partes)

Por los puntos 2,3,5,6,8,9,11 y 12, se bajan perpendiculares al eje de las x.

Por los puntos 2',3',5',6',8',9,11' y 12', se trazan paralelas al eje de los x, que cortan a las perpendiculares anteriores en los puntos a,b,c,d,e,f,g y h, uniendo dichos puntos por medio de curvas, se obtiene la elipse pedida.

METODO POR INTERSECCIONES.

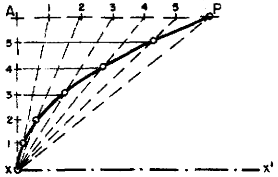


Se traza el paralelogramo ABCD, siendo AB y CD igual al eje mayor y AC y BC igual al eje menor.

Los lados del paralelogramo se dividen en partes iguales, se numeran y se unen como se indica en la figura, quedando trazada la elipse pedida por el perfil interior de los trazos.

CONSTRUCCION DE LA PARABOLA.

CONOCIDO EL VERTICE x, EL EJE xx' Y UN PUNTO P.



Por x, vértice conocido, se levanta una perpendicular.

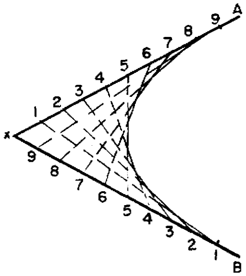
Por P, se traza una paralela a xx' que corta a la perpendicular trazada en A.

Las distancias xA y AP, se dividen en igual número de partes iguales.

Se une el vértice x con las divisiones en AP y se hacen paralelas a xx', por las divisiones de xA

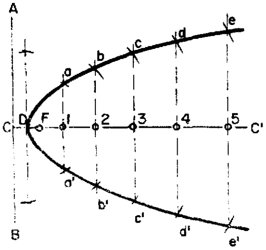
Los puntos de cruce de las paralelas en xA con las diagonale de x a AP, son puntos de la parábola.

CUANDO SE DAN DOS TANGENTES.



xA y xB, tangentes dadas que se dividen en igual número de partes iguales y haciendo los trazos que resuelven el perfil de la parábola pedida, según se indica en la figura adjunta.

CONOCIENDO EL FOCO Y LA DIRECTRIZ.



AB = la directríz.

F = el foco dado.

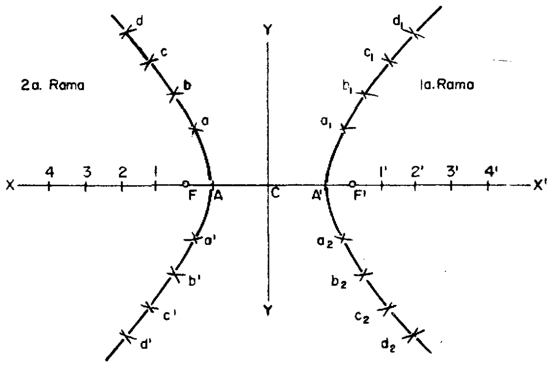
CC' = perpendicular a AB pasando por F.

D = 1/2 CF

Los puntos 1,2,3,4 y 5, se tomaron sobre CC', con magnitudes arbitrarias y pasando por ellos, se trazaron paralelos a AB.

Con radios C1, C2, C3, C4 y C5, se trazaron las intersecciones aa', bb', cc', dd' y ee' que son puntos de la parábola pedida.

CONSTRUIR UNA HIPERBOLA, DADOS LOS DOS FOCOS Y LA DIFERENCIA CONSTANTE DE LOS RADIOS VECTORES



F y F', los dos focos dados, sobre XX' y C, punto medio de la distancia comprendida entre los focos F y F'.

Se hace CA y CA' = a la mitad de la diferencia constante de los radios vectores.

A y A', son los vértices de la curva.

Sobre AX y A'X', se toman los puntos I-I', 2-2', 3-3' y 4-4', arbitrarios pero a igual distancia de F' como de F.

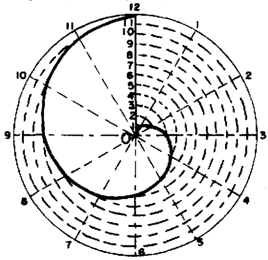
Con centros en F y F' respectivamente y radios AI, A2, A3 y A4, se trazan arcos arriba y abajo de FX y F'X'.

Con radio A'FI y centro en F', se hacen las intersecciones a y a' y con el mismo radio y centro en F, se hacen las intersecciones a_1 y a_2.

Siguiendo el mismo procedimiento se trazan las siguientes intersecciones en las dos ramas haciendo el radio A'F2 para los puntos b, b', b_1, b_2' y así sucesivamente hasta determinar los puntos necesarios al trazo pedido.

Uniendo d, c, b, a, A, a', b', c' y d', se obtiene una de las ramas y uniendo d_1, c_1, b_1, a_1, A' a_2, b_2, c_2, d_2, se obtiene la otra.

TRAZO DE UNA ESPIRAL
METODO DE "ARQUIMIDES"



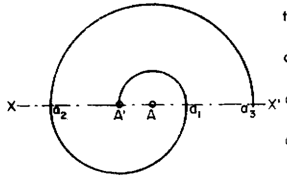
Se traza el círculo generador y se divide en X número de partes iguales y uno de los radios se divide en igual número de partes iguales en que se dividió el círculo.

Con centro en O y radio OI, se traza un arco que corte al radio I del círculo generador.

Con centro en O y radio O2, se traza un arco que corte al radio 2 y así sucesivamente.

Uniendo las intersecciones obtenidas, queda trazada la espiral pedida.

ESPIRAL DE DOS PUNTOS.



En XX', eje de la espiral se toman los puntos AA'

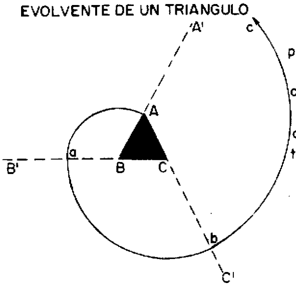
Con centro en A y radio AA', se traza el arco $A'a_1$

Con centro en A' y radio $A'a_1$, se tràza el arco a_1 a_2.

Con centro en A y radio Aa_2 se traza el arco a_2a_3 y así sucesivamente hasta completar el número de vueltas deseadas.

EVOLVENTES. (Todo polígono regular es capaz de generar su propia evolvente)

EVOLVENTE DE UN TRIANGULO

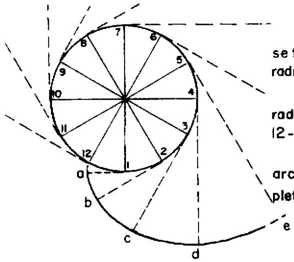


ABC, el triángulo dado y AA', BB' y CC', prolongaciones de sus lados en el mismo sentido.

Con centro en B y radio BA, se traza un arco que toque a la prolongación de B en a.

Con centro en C y radio Ca, se traza el arco ab y así sucesivamente hasta lograr la magnitud deseada para la evolvente pedida.

EVOLVENTE DE UN CIRCULO

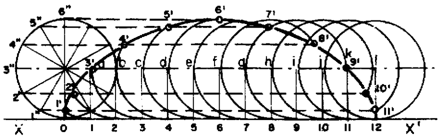


Se divide el círculo en X partes iguales y se trazan tangentes por los puntos donde los radios tocan a la circunferencia.

Con centro en el punto de tangencia 1 y radio igual a la cuerda 1-12, se traza el arco 12-a.

Con centro en 2 y radio 2-a, se traza el arco a-b y así sucesivamente hasta completar la magnitud deseada de la curva.

TRAZO DE UNA CICLOIDE.



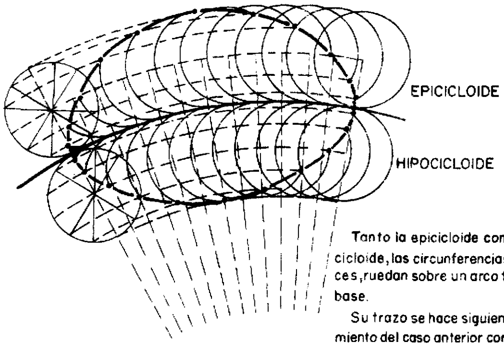
Sobre la horizontal XX', se traza una circunferencia la cual se divide en "n" partes iguales (en el ejemplo n=12) y por los puntos 1", 2", 3", 4", 5" y 6", se trazan paralelas a XX'.

La magnitud O-12, tomada sobre $XX' = \pi D$ y se divide en 12 partes iguales.
D= diámetro de la circunferencia generatríz

Por los puntos 1, 2, 3, ..., 12, se levantan perpendiculares que determinan en el eje(3°) los puntos a, b, c, d, ... l.

Con radio igual al de la circunferencia generatríz y centro en los puntos a, b, c, ... l, sucesivamente, se trazan los arcos 1-1', 2-2', 3-3' y así hasta el centro l que determina en 12 el último punto y final de la curva.

Uniendo los puntos O-1', 1'-2', 2'-3', ... 11'-12', se obtiene la cicloide pedida

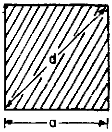


Tanto la epicicloide como en la hipocicloide, las circunferencias generatrices, ruedan sobre un arco tomado como base.

Su trazo se hace siguiendo el procedimiento del caso anterior con la salvedad de que las proyecciones de los círculos generatrices son arcos concéntricos al arco base.

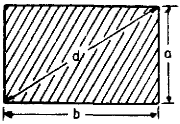
Areas

CUADRADO



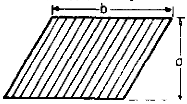
$A = a^2$, $a = 0.7071d = \sqrt{A}$
$A = 1/2\, d^2$, $d = 1.414a = 1.414\sqrt{A}$

RECTANGULO



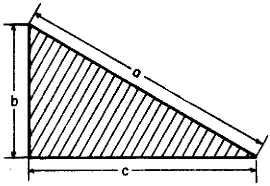
$A = ab = a\sqrt{d^2 - a^2} = b\sqrt{d^2 - b^2}$

PARALELOGRAMO



$A = ab$, $a = A/b$, $b = A/a$

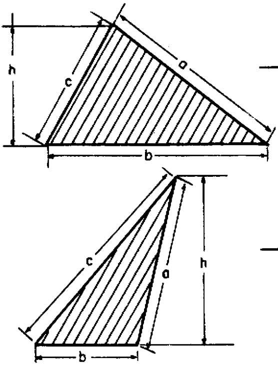
TRIANGULO RECTANGULO



$$A = 1/2\,bc$$

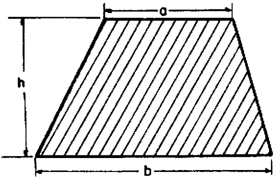
$$a = \sqrt{b^2+c^2},\ b = \sqrt{a^2-c^2},\ c = \sqrt{a^2-b^2}$$

TRIANGULO ACUTANGULO



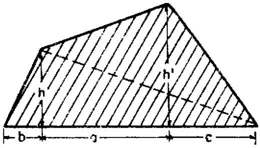
$$A = \frac{bh}{2} = \frac{b}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)}$$

TRAPECIO



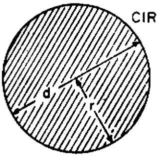
$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

TRAPEZOIDE



$$A = \frac{(h+h')a + bh + ch'}{2}$$

CIRCULO.

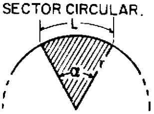


C = Circunferencia $= 2\pi r$

$A = \pi r^2$

$d = \frac{C}{\pi}$, $r = 1/2 \frac{C}{\pi}$

SECTOR CIRCULAR.



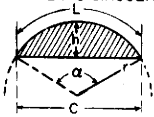
L = longitud del arco $= \frac{r\alpha\pi}{180^\circ}$

$A = 1/2\, rL$

$r = 2A/L = \frac{57.296L}{\alpha}$

$\alpha = \frac{57.296L}{r}$

SEGMENTO CIRCULAR.

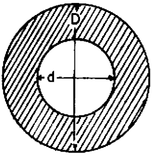


$A = 1/2\left[rL - C(r-h)\right]$

$r = \frac{C^2+4h}{8h}$, $L = 0.01745\, r\alpha$

$h = r - 1/2\sqrt{4r^2 - C^2}$, $\alpha = \frac{57.296L}{r}$

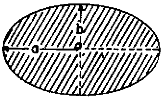
CORONA CIRCULAR



D=diámetro mayor
d= " menor
R=radio mayor
r= " menor

$A = \pi(R^2 - r^2)$

ELIPSE

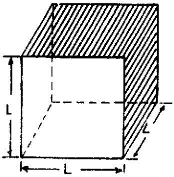


$A = \pi ab$

Perímetro (aprox.) $= \pi\sqrt{2(a^2+b^2) - \frac{(a-b)^2}{2.2}}$

Volúmenes

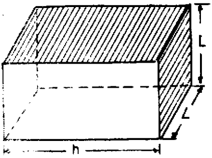
CUBO



$V = L^3$

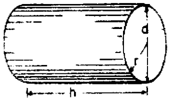
$L = \sqrt[3]{V}$

PRISMA DE BASE CUADRADA.



$V = L^2 h$

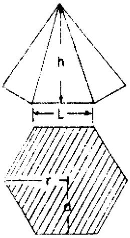
CILINDRO



$V = \pi r^2 h$

Sup. total $= 2\pi r(r+h)$

PIRAMIDE HEXAGONAL

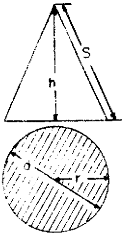


a = apotema
A = área de la base
n = número de lados
r = radio de la base
h = altura de la pirámide

$V = \frac{Ah}{3}$

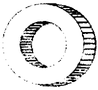
Sup total $= 3L(a+h)$

CONO



$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

ANILLO DE SECCION RECTANGULAR.



D = diámetro mayor , d = diámetro menor
c = ancho del anillo

$V = \frac{\pi c}{4}(D^2 - d^2)$

ESFERA

$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6}$

$A = 4\pi r^2$

Trigonometría

TRIGONOMETRIA es la parte de las Matemáticas que estudia las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo y aplica dichas relaciones, al cálculo de los elementos desconocidos en el triángulo.

Es común el uso del alfabeto griego (primeras y últimas letras de él), en la designación de los ángulos del triángulo.

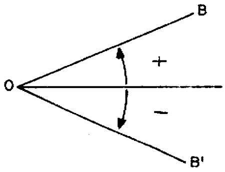
α alfa
β beta
γ gamma
δ delta
ϵ epsilon
ζ zeda
η eta
θ theta
ι iota
κ kappa
λ lamda
μ mu
ν nu
ξ xi
o omicron
π pi
ρ rho
σ sigma
ς "
τ tau
υ upsilon
ϕ phi
χ xi
ψ psi
ω omega

FUNCION, es una magnitud variable, ligada con otra llamada VARIABLE INDEPENDIENTE, en tal forma que, a una variación de ésta le corresponde una variación de la primera.

Dos funciones son INVERSAS, cuando la variable independiente de la primera, es función en la segunda y viceversa.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS, son razones entre elementos rectilíneos ligados a un ángulo cuyas variaciones dependen de la variación del ángulo.

ANGULOS POSITIVOS, NEGATIVOS Y SIMETRICOS.



Son ANGULOS POSITIVOS, cuando OB (lado móvil) se mueve en dirección contraria a las manecillas de un reloj y si se mueve en el sentido de dichas manecillas, es NEGATIVO.

Dos ángulos son SIMETRICOS, cuando su valor absoluto es igual.

SISTEMA SEXAGESIMAL y SISTEMA CICLICO.

La magnitud de un ángulo puede expresarse en grados (sistema SEXAGESIMAL), o en unidades cíclicas (sistema CICLICO).

En el sistema Sexagesimal, el ángulo unidad es de un grado (1°), o sea la nonagésima parte del ángulo recto

En el sistema Cíclico, el ángulo unidad, o unidad cíclica, o de medida circular, es el ángulo central de una circunferencia cualquiera, cuyos lados interceptan un arco de longitud igual a la del radio, de donde toma el nombre de RADIANTE o RADIAN.

Unidad Cíclica expresada en grados:

$2\pi r$ = longitud de la circunferencia

x = número de grados del RADIAN

de donde: $\frac{x}{360} = \frac{r}{2\pi r}$

por lo tanto: $x = \frac{360r}{2\pi r} = \frac{180}{\pi} = 57,2958° = 57°17'44.8''$

Como π es una constante con valor fijo por ser la razón de toda circunferencia a su diámetro, el Radián es un ángulo bien definido y es independiente del radio de la circunferencia; por lo tanto $180/\pi$ = 1 RADIAN.

Si $180 = \pi$ radianes, por divisiones sucesiva se tiene

GRADOS	90	60	45	30	10	1
RADIANES	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$

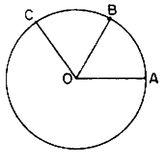
APLICACION

La medida cíclica del ángulo de 75°, es:

$$\frac{\pi}{180} \times 75 = \frac{5\pi}{12} = 1.3089975 \text{ radianes}$$

Cuando un ángulo está expresado en unidades cíclicas, para reducirlo a grados, basta multiplicar su valor por 57.2958

Un ángulo expresado en unidades cíclicas es igual a la razón del arco, al radio de la circunferencia.



OA = r (de una circunferencia cualquiera).
AOB = el ángulo unidad cíclica o radián.
AOC = un ángulo cualquiera con arco AC de longitud L y se tiene:

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{arc. } AC}{\text{arc. } AB} = \frac{L}{r} \quad \therefore \quad \frac{\angle AOC}{\text{radián}} = \frac{L}{r}$$

Despejando $\angle AOC$, se tiene:

$\angle AOC = \frac{L}{r}$ radián y como el radián es la unidad en el sistema cíclico, queda: $\angle AOC = \frac{L}{r}$

Si se tiene un arco de 25 cm. correspondiente a un ángulo central en una circunferencia cuyo radio es de 30 cm.

Siendo X, el ángulo, su medida en unidades cíclicas

$$X = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \text{ radián}$$

Su valor en grados es:

$$57.2958 \frac{5}{6} = 47.7465° = 47°44'47.4''$$

El sistema cíclico se recomienda para la medición de ángulos cuando se opera con velocidades angulares.

w = velocidad angular en radianes, por segundo, de un cuerpo giratorio.
v = velocidad de un punto en la periferia por segundo.
r = radio en metros

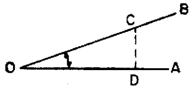
De donde:

$$w = \frac{v}{r}$$

Suponiendo que v = 20 m. por segundo y r = 2 m, se tiene:

$$w = \frac{20}{2} = 10 \text{ radianes por segundo.}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS



AOB = un ángulo agudo.
OB = lado móvil
CD = perpendicular bajada de C (punto cualquiera toma do en OB), al lado fijo OA, del triángulo.

Las razones entre los segmentos DC, OD y OC, forman las FUNCIONES TRIGONOMETRICAS del ángulo AOB.

Sus definiciones son las siguientes:

$$\frac{DC}{OC} = \text{SENO de AOB}$$

$$\frac{OD}{OC} = \text{COSENO de AOB}$$

$$\frac{DC}{OD} = \text{TANGENTE de AOB}$$

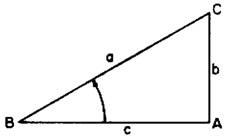
$$\frac{OD}{DC} = \text{COTANGENTE de AOB}$$

$$\frac{OC}{OD} = \text{SECANTE de AOB}$$

$$\frac{OC}{DC} = \text{COSECANTE de AOB}$$

la diferencia 1 - cos AOB = senoverso AOB
" " 1 - sen AOB = cosenoverso AOB

DEFINICIONES EN FUNCION DE LOS LADOS, DEL TRIANGULO RECTANGULO.



Sea ABC, el triángulo rectángulo y
a = la HIPOTENUSA
b = el CATETO OPUESTO
c = el CATETO ADYACENTE
Las FUNCIONES TRIGONOMETRICAS del ángulo "B", se expresan de la siguiente manera.

$$\text{SEN. B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{COS. B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{TANG. B} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{COT. B} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{SEC. B} = \frac{a}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{CSC. B} = \frac{a}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{SEN VER. B} = 1 - \text{COS. B} = 1 - \frac{c}{a}$$

$$\text{COS VER. B} = 1 - \text{SEN. B} = 1 - \frac{b}{a}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS.

Son dos funciones cuyo producto es = 1; por lo tanto, para un mismo ángulo, son FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS, el seno y la cosecante, el coseno y la secante y la tangente y la cotangente.

En el triángulo ABC, según las definiciones, se tiene:

$\text{sen} B = b/a$; $\csc B = a/b$, de donde:

$\text{sen} B \csc B = (b/a)(a/b) = 1$ ∴

$$\text{sen} B = \frac{1}{\csc B} \quad \text{y} \quad \csc B = \frac{1}{\text{sen} B}$$

de la misma manera se deducen las fórmulas siguientes:

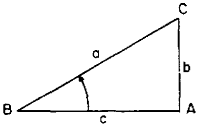
$\cos B = c/a$; $\sec B = a/c$

de donde: $\cos B \sec B = (c/a)(a/c) = 1$ $\therefore$

$$\cos B = \frac{1}{\sec B} \quad y \quad \sec B = \frac{1}{\cos B}$$

De lo anterior se deduce que:

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS, <u>NO SON LONGITUDES</u>, SON RAZONES ENTRE LONGITUDES PUESTO QUE <u>REPRESENTAN VALORES ABSTRACTOS</u>, ASI COMO QUE DICHOS VALORES NO DEPENDEN DE LA LONGITUD DE LOS LADOS DE EL TRIANGULO SINO <u>DE LA MAGNITUD DEL ANGULO</u>.



En el triángulo rectángulo BAC, conforme a las definiciones anteriores, pueden formularse los siguientes igualdades.

$\operatorname{sen} B = b/a$, $\cos C = b/a$

$\operatorname{tang} B = b/c$, $\cot C = b/c$

$\sec B = a/c$, $\csc C = a/c$, de donde:

$\cos C = \operatorname{sen} B$; $\cot C = \operatorname{tang} B$; $\csc C = \sec B$ y por lo tanto:

El seno, la tangente y la secante de un ángulo son iguales al coseno, la cotangente y la cosecante del ángulo complementario puesto que; los ángulos B y C, son complementarios por lo que; el coseno, la cotangente y la cosecante se llaman COFUNCIONES.

FUNCIONES DE ANGULOS COMPRENDIDOS DENTRO DE LOS 90° y 360°.

Cuando el ángulo B está comprendido entre:	90° y 180°	180° y 270°	270° y 360°
sen B =	$+\cos(B-90°)$	$-\operatorname{sen}(B-180°)$	$-\cos(B-270°)$
cos B =	$-\operatorname{sen}(B-90°)$	$-\cos(B-180°)$	$+\operatorname{sen}(B-270°)$
tang B =	$-\cot(B-90°)$	$+\operatorname{tang}(B-180°)$	$-\cot(B-270°)$
cot B =	$-\operatorname{tang}(B-90°)$	$+\cot(B-180°)$	$-\operatorname{tang}(B-270°)$
sec B =	$-\csc(B-90°)$	$-\sec(B-180°)$	$+\csc(B-270°)$
csc B =	$+\sec(B-90°)$	$-\csc(B-180°)$	$-\sec(B-270°)$
senver B=	$1+\operatorname{sen}(B-90°)$	$1+\cos(B-180°)$	$1-\operatorname{sen}(B-270°)$
cosver B=	$1-\cos(B-90°)$	$1+\operatorname{sen}(B-180°)$	$1+\cos(B-270°)$

SIGNOS DE LAS FUNCIONES EN LOS CUATRO CUADRANTES

CUADRANTES	1°	2°	3°	4°
GRADOS	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
seno y cosecante	+	+	−	−
tangente y cotangente	+	−	+	−
secante y coseno	+	−	−	+

VALORES EXACTOS DE LAS FUNCIONES DE ALGUNOS ANGULOS (los más usuales)

Angulo	0°	30°	45°	60°	90°	120°	13[illegible]°	150°	180°	270°	360°
sen	0	1/2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1/2	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1/2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
tang	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	−2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	−1	∞	1
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	−1	∞

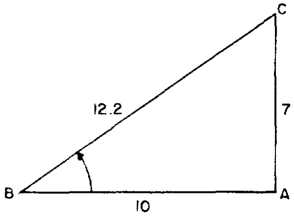
CALCULO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

ANGULOS AGUDOS.

Conocidos dos lados de un triángulo rectángulo o una función de uno de los ángulos agudos, pueden expresarse los valores de todos las funciones de los dos ángulos agudos.

En el ángulo ABC, con valores conocidos de 12.2 para la hipotenusa y 7 para el cateto opuesto a B, por el teorema de PITAGORAS, se tiene:

$$BA=\sqrt{(BC)^2-(CA)^2}=\sqrt{12.2^2-7^2}=\sqrt{100}=10$$



Las funciones de los ángulos en B y C, son:

$$\text{sen}\,B=\cos C=\frac{7}{12.2}$$

$$\cos B=\text{sen}\,C=\frac{10}{12.2}$$

$$\text{tang}\,B=\cot C=\frac{7}{10}$$

$$\cot B=\text{tang}\,C=\frac{10}{7}$$

$$\sec B=\csc C=\frac{12.2}{10}$$

$$\csc B=\sec C=\frac{12.2}{7}$$

Dado la $\sec B=\frac{5}{3}$, calcular las demás funciones del ángulo en B.

Si la $\sec B=\frac{5}{3}=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$, el cateto opuesto $=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$, de donde:

$$\text{sen}\,B=\frac{4}{5}=0.8$$

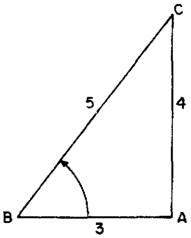
$$\cos B=\frac{3}{5}=0.6$$

$$\text{tang}\,B=\frac{4}{3}=1.33$$

$$\cot B=\frac{3}{4}=0.75$$

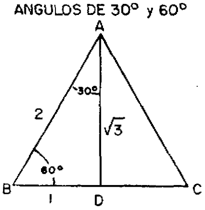
$$\sec B=\frac{5}{3}=1.66$$

$$\csc B=\frac{5}{4}=1.25$$



CASOS PARTICULARES.

ANGULOS DE 30° y 60°



ABC = un triángulo equilátero

DA, perpendicular a BC en D, por A.

Si BD=1, BA=2 y $AD=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

Por lo cual y según las definiciones fundamentales que ligan las funciones de dos ángulos complementarios, se tiene:

$$\text{sen}\,30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=0.5$$

$$\cos 30^\circ=\text{sen}\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$$

$$\text{tang}\,30^\circ=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0.5764$$

$$\cot 30^\circ=\text{tang}\,60^\circ=\sqrt{3}=1.732\ ,\quad \sec 30^\circ=\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1.155$$

$$\csc 30^\circ=\sec 60^\circ=2\ ,\quad \text{senver}\,30^\circ=\text{cosver}\,60^\circ=1-\cos 30^\circ=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=0.1340$$

$$\text{cosver}\,30^\circ=\text{senver}\,60^\circ=1-\text{sen}\,30^\circ=1-1/2=1/2=0.5$$

RELACIONES DIVERSAS.

$$\frac{\text{sen } B}{\cos B} = \text{tang } B = \frac{1}{\cot B}$$

$$\sec B = \frac{1}{\cos B}$$

$$\csc B = \frac{1}{\text{sen} B}$$

$$\text{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$$
$$\text{tang}^2 B + \cot^2 B = 1$$

$$\text{sen}^2 B = \frac{1}{1 + \cot^2 B}$$

$$\cos\ B = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 B}$$

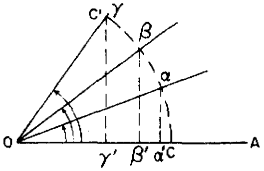
SUMAS Y DIFERENCIAS.

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen} A\ \ \cos B \pm \cos A\ \ \text{sen} B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\ \ \cos B \pm \text{sen} A\ \ \text{sen} B$$

$$\text{tang}(A \pm B) = \frac{\text{tang} A \pm \text{tang} B}{1 \mp \text{tang} A\, \text{tang} B}$$

VARIACION DE LAS FUNCIONES

ANGULOS COMPRENDIDOS ENTRE 0° y 90°



AO, posición inicial del lado móvil de los ángulos $AO\alpha'$, $AO\beta'$, $AO\gamma'$.

Con magnitud $O\alpha$, se traza el arco CC' que determina los puntos α, β y γ.

Por los puntos α, β y γ, se trazan las perpendiculares $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ y $\gamma\gamma'$, que forman varios triángulos rectángulos en los cuales el cateto opuesto aumenta conforme crece el ángulo mientras el cateto adyacente disminuye, por lo tanto:

$$\alpha\alpha' < \beta\beta' < \gamma\gamma' \quad \text{y} \quad o\alpha' > o\beta' > o\gamma'$$

de donde:

$$\frac{\alpha\alpha'}{o\alpha} < \frac{\beta\beta'}{o\beta} < \frac{\gamma\gamma'}{o\gamma}\text{, o sea; sen } AO\alpha < \text{sen } AO\beta < \text{sen } AO\gamma$$

$$\frac{\alpha\alpha'}{o\alpha'} < \frac{\beta\beta'}{o\beta'} < \frac{\gamma\gamma'}{o\gamma'}\text{, o sea; tang } AO\alpha < \text{tang } AO\beta < \text{tang } AO\gamma$$

$$\frac{o\alpha}{o\alpha'} < \frac{o\beta}{o\beta'} < \frac{o\gamma}{o\gamma'}\text{, o sea; sec } AO\alpha < \sec AO\beta < \sec AO\gamma$$

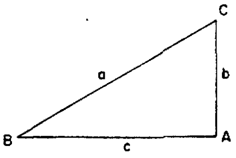
en consecuencia:

Cuando un ángulo varía de 0° a 90°, el seno, la tangente y la secante, aumentan de valor mientras que; la cosecante, la cotangente y el coseno, por ser recíprocos de de las funciones anteriores, disminuyen al variar el ángulo de 0° a 90°.

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

Siendo ABC un triángulo rectángulo:



Si:

senB= b/a ; b=a senB y

cos C = b/a ; b=a cos C

de donde se deduce que:

UN CATETO CUALQUIERA ES IGUAL A LA HIPOTENUSA POR EL SENO DEL ANGULO — OPUESTO AL CATETO BUSCADO O POR EL COSENO DEL ANGULO AGUDO ADYACENTE A DICHO CATETO.

De las igualdades anteriores y de la definición de funciones recíprocas se obtiene:

a= b/sen B = b l/senB = bcscB , de donde se deduce que:

LA HIPOTENUSA ES IGUAL AL CATETO DADO,POR LA SECANTE DEL ANGULO OPUESTO, O POR LA SECANTE DEL ANGULO AGUDO,ADYACENTE A DICHO CATETO.

En consecuencia, en el mismo triángulo rectángulo:

tang B = b/c ; b=c tang B y

cot C= b/c ; b = c cot B

de donde se deduce que:

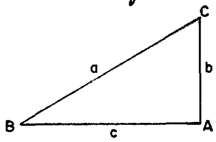
UN CATETO CUALQUIERA ES IGUAL A OTRO CATETO MULTIPLICADO POR LA — TANGENTE DEL ANGULO OPUESTO AL CATETO BUSCADO O POR LA COTANGENTE DEL ANGULO AGUDO ADYACENTE A DICHO CATETO.

IDENTIDADES

Identidad trigonométrica, es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo, que se verifica para cualquier valor obtenido a dicho ángulo.

$$\text{tang } A = \frac{1}{\cot A} \quad , \ \text{sen } B = \cos(90^\circ - B)$$

Fórmulas fundamentales.



BAC, triángulo rectángulo

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \quad , \ \cos B = \frac{c}{a}$$

Elevando al cuadrado las igualdades anteriores y sumando miembro a miembro, se tiene:

$$\text{sen } B^2 + \cos^2 B = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

si $b^2 + c^2 = a^2$ (teorema de Pitágoras), se tiene:

$$\text{seno}^2 B + \text{coseno}^2 B = 1$$

Dividiendo las igualdades anteriores miembro a miembro:

$$\frac{\text{sen } B}{\cos B} = \frac{b}{c} \ ; \ \frac{\cos B}{\text{sen } B} = \frac{c}{b} \ , \text{ de donde:}$$

$$\frac{\text{sen } B}{\cos B} = \text{tang } B$$

$$\frac{\cos B}{\text{sen } B} = \cot B$$

Elevando al cuadrado $\sec B = \frac{a}{c}$; $\csc B = \frac{a}{b}$ y sustituyendo a^2 por $b^2 + c^2$, resulta:

$$\sec^2 B = \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{c^2} \ ; \ \csc^2 B = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2} \quad , \text{ de donde:}$$

$\sec^2 B = 1 + \tan^2 B$

$\csc^2 B = 1 + \cot^2 B$

Ecuaciones trigonométricas.

Ecuaciones trigonométricas, son igualdades de un mismo ángulo, que sólo se satisfacen para determinado valor o valores del ángulo.

En $2\cos X = \sec X$

$X = 45^\circ$, de donde se deduce que la ecuación anterior se satisface solamente cuando el ángulo vale 45°

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar su raíz o raíces.

Raíz de una ecuación es el valor encontrado para el ángulo, que la satisface.

Las ecuaciones trigonométricas, igual que las algebraicas, pueden ser de cualquier grado y simultaneas.

Cuando una ecuación trigonométrica contiene diferentes razones, se transforma en otra que contenga una sóla y se resuelve por los procedimientos algebraicos indicados.

En $3\tan a + 3\cot a = 4\sqrt{3}$, como $\cot a = 1/\tan a$, se tiene:

$$3\tan a + 3\frac{1}{\tan a} = 4\sqrt{3}$$, de donde:

$$3\tan^2 a + 3 = 4\sqrt{3}\tan a \quad \therefore$$

$3\tan^2 a - 4\sqrt{3}\tan a + 3 = 0$, que es una euación de segundo grado cuyo incógnita es tang a. Resolviéndola, se tiene:

$$\tan a = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-36}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}(2\pm 1)}{3}$$

a_1, es el ángulo con tang $= \sqrt{3} = 60^\circ$

a_2, es el ángulo con tang $= \sqrt{3}/3 = 30^\circ$

Comprobando:

$$3\tan 60^\circ + 3\cot 60^\circ = 3\sqrt{3} + 3\frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$3\tan 30^\circ + 3\cot 30^\circ = 3\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3}$$

Superficie de triángulos rectángulos.

$S = \frac{1}{2}bc$, S = superficie

b = cateto opuesto

c = cateto adyacente

B = ángulo dado

de donde:

Como $b = c\tan B$, se tiene:

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}c(c\tan B) = \frac{1}{2}c^2\tan B$$

Si $c = 6$ cm y $B = 53^\circ 8'$, sustituyendo en $S = 1/2\ c^2 \tan B$, se tiene:

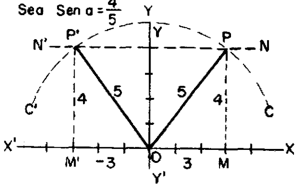
$$S = 1/2 \times 6^2 \times 1.333 = 1/2 \times 36 \times 1.333 = 18 \times 1.333 = 23.994\ cm^2$$

1.333 es el valor de la tangente de $B = 53^\circ 8'$, obtenido en las tablas.

Relación numérica entre las funciones.

DADA UNA FUNCION, CALCULAR LAS DEMAS.

Sea $\text{Sen } a = \frac{4}{5}$



Siendo el seno la razón de la ordenada a la distancia al origen, basta considerar el punto P cuya ordenada sea = 4 y la distancia al origen sea = 5.

Siendo YY' y XX' los ejes coordenados y O, el origen, a partir de O y en dirección de la Ys. positivas, se toman 4 unidades. La recta NN' es paralela a XX' y pasa por el punto 4 de Y.

Con centro en O y radio igual a 5 unidades, se traza el arco CC' que corta a NN' en los puntos P y P'.

Se unen O con P y O con P' y por P y P' se bajan perpendiculares que sobre XX', determinan los puntos M y M'

Los ángulos XOP y X'OP', satisfacen las condiciones del problema puesto que son dos ángulos con sen = 4/5 = al seno dado.

La abscisa de los puntos P y P', es

$$\sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{25-16} = \pm 3$$

por lo tanto:

$\text{sen} A = 4/5$

$\cos A = \pm 3/5$

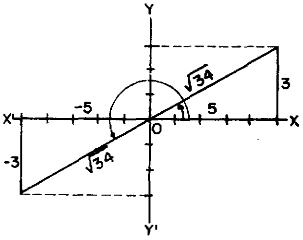
$\text{tang} A = \pm 4/3$

$\cot A = \pm 3/4$

$\sec A = \pm 5/3$

$\csc A = 5/3$

Si la tang A = 3/5, siendo positivo el valor dado, los dos puntos que satisfacen esta condición, son: P(3,5) y P(-3,-5).



Como se observa en la figura, existen dos ángulos cuya tang. es igual a 3/5 por lo tanto:

$\text{tang } A = 3/5$

$\text{sen } A = \pm\ 3/\sqrt{34} = \pm 3\sqrt{34}/34$

$\cos A = \pm 5/\sqrt{34} = \pm 5\sqrt{34}/34$

$\cot A = 5/3$

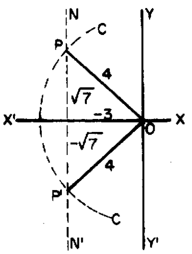
$\sec A = \pm\sqrt{34}/5$

$\csc A = \pm\sqrt{34}/3$

Si la $\sec A = -\frac{4}{3}$, en donde por ser negativo el valor dado y teniendo en cuenta que la distancia se toma siempre en valor absoluto, es decir, positivo, la abscisa es negativa.

Sobre el eje XX' y a partir de O en dirección a X', se trazan 3 unidades y se hace NN' paralela al eje YY'

Con centro en O y radio = 4 unidades, se traza el arco CC' que corta a [illegible] NN' en los puntos PP'.



OP y OP', valen 4 unidades y forman dos ángulos que satisfacen las condiciones del problema, puesto que son dos ángulos cuya secante es igual a la secante dada, por lo tanto:

si $\sec A = -\frac{4}{3}$,

$\operatorname{sen} A = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$

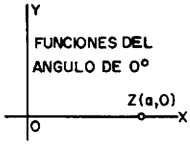
$\cos A = -\frac{3}{4}$

$\tan A = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\cot A = \mp \frac{3}{\sqrt{7}} = \mp = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

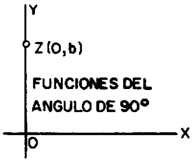
$\csc A = \pm \frac{4}{\sqrt{7}} = \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$

Valor de las funciones de algunos ángulos y relaciones mutuas.



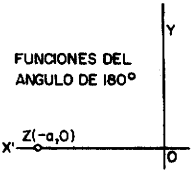
Si OZ = a, las coordenadas de Z, punto sobre el lado móvil, son (a,0), de donde:

$\operatorname{sen} 0^\circ = 0/a = 0$
$\cos 0^\circ = a/a = 1$
$\operatorname{tang} 0^\circ = 0/a = 0$
$\cot 0^\circ = a/0 = \infty$
$\sec 0^\circ = a/a = 1$
$\csc 0^\circ = a/0 = \infty$



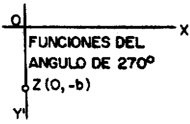
Si OZ = b, las coordenadas de Z, punto sobre el lado móvil, son (0,b), de donde:

$\operatorname{sen} 90^\circ = b/b = 1$
$\cos 90^\circ = 0/0 = 0$
$\operatorname{tang} 90^\circ = b/0 = \infty$
$\cot 90^\circ = 0/b = 0$
$\sec 90^\circ = b/0 = \infty$
$\csc 90^\circ = b/b = 1$



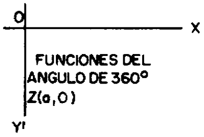
Si OZ = a, las coordenadas de Z, punto sobre el lado móvil, son (-a,0), de donde:

$\operatorname{sen} 180^\circ = 0/a = 0$
$\cos 180^\circ = -a/a = -1$
$\operatorname{tang} 180^\circ = 0/-a = 0$
$\cot 180^\circ = -a/0 = -\infty$
$\sec 180^\circ = a/-a = -1$
$\csc 180^\circ = a/0 = \infty$



Si OZ = b, las coordenadas de Z, punto sobre el lado móvil, son (0,-b), de donde:

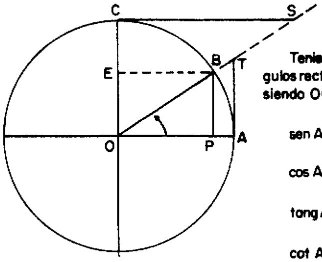
$\operatorname{sen} 270^\circ = -b/b = -1$, $\cos 270^\circ = 0/b = 0$
$\operatorname{tang} 270^\circ = -b/0 = -\infty$, $\cot 270^\circ = 0/-b = 0$
$\sec 270^\circ = b/0 = \infty$, $\csc 270^\circ = b/-b = -1$



En el ángulo de 360°, sus funciones son iguales a las del ángulo de 0°, puesto que sus coordenadas son las mismas.

Angulos simétricos

CIRCULO TRIGONOMETRICO, es el círculo cuyo radio es igual a 1,(unidad arbitraria)



Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos rectángulos OPB y OAT, OPB y OCS y siendo OC=OA=OB=1, resulta:

$$\text{sen AOB} = \frac{PB}{OB} = \frac{PB}{1} = PB$$

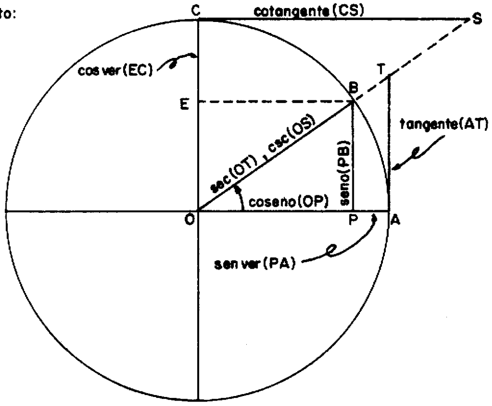
$$\cos \text{AOB} = \frac{OP}{OB} = \frac{OP}{1} = OP$$

$$\text{tang AOB} = \frac{PB}{OP} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

$$\cot \text{AOB} = \frac{OP}{PB} = \frac{CS}{OC} = \frac{CS}{1} = CS$$

$$\sec \text{AOB} = \frac{OB}{OP} = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{1} = OT \quad , \quad \csc \text{AOB} = \frac{OB}{PB} = \frac{OS}{OC} = \frac{OS}{1} = OS$$

por lo tanto:



Se determinan los signos de las funciones representadas por rectas, aplicando los principios siguientes:

Todo segmento perpendicular al <u>eje de los cosenos</u> (eje de las X), es positivo si se toma para arriba y negativo si se toma para abajo.

Todo segmento perpendicular al <u>eje de los senos</u> (eje de las Y), es positivo si se toma a la derecha y negativo si se toma a la izquierda.

La secante y la cosecante son positivas si se toman sobre el radio o su prolongación que pasa por el extremo del arco interceptado por los lados del triángulo y negativos si se — hacen en sentido contrario.

Sumas y diferencias

$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \pm \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tang}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$

$\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$

Productos

$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

$\operatorname{tang} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a}$

Cocientes

$\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$

$\cos \dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$

$\operatorname{tang} \dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$

Cálculo logarítmico

(PARA ANGULOS MUY PEQUEÑOS)

$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

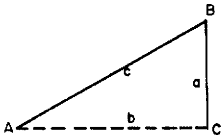
$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$

$\dfrac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\cot \dfrac{a+b}{2} \cot \dfrac{a-b}{2}$

Resolución de triángulos rectángulos

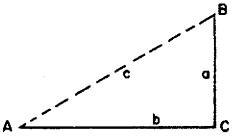


Dados a y c, encontrar A, B y b.

$\operatorname{sen} A = a/c$ $\qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$\cos B = a/c$

$\text{area} = a/2 \sqrt{c^2 - a^2}$



Dados a y b, encontrar A, B y c

$\tan A = a/b$

$\tan B = b/a$

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$\text{area} = \dfrac{ab}{2}$

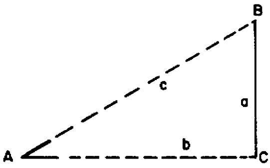
Dados A y a, encontrar B, b y c

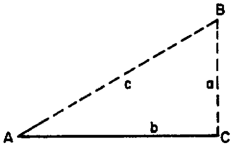
$B = 90^\circ - A$

$b = a \cot A$

$\text{area} = \dfrac{a^2 \cot A}{2}$

$c = \dfrac{b}{\cos A}$





Dados A y b, encontrar B, a y c

$B = 90^\circ - A$

$a = b \tan A$

$\text{area} = \dfrac{b^2 \tan A}{2}$

$c = \dfrac{b}{\cos A}$

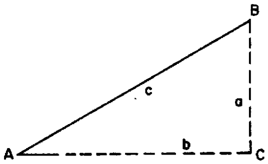
Dados A y c, encontrar B, a y b

$B = 90^\circ - A$

$a = c \operatorname{sen} A$

$b = c \cos A$

$\text{area} = \dfrac{c^2 \operatorname{sen} A \cos A}{2}$ ó $\dfrac{c^2 \operatorname{sen} 2A}{4}$



Resolución de triángulos oblicuos

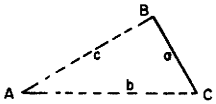
Dados A, B y a, encontrar C, b y c

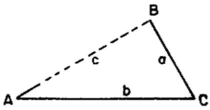
$C = 180^\circ - (A+B)$

$b = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$

$c = \dfrac{a \operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A}$

$\text{area} = 1/2\, ab \operatorname{sen} C = \dfrac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$





Dados A, a y b, obtener B, C y c

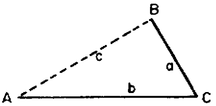
$\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}$

$\text{area} = \dfrac{ab \operatorname{sen} C}{2}$

$C = 180^\circ - (A+B)$

$c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$

Dados C, a y b, encontrar $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$, A, b y c



$$\frac{1}{2}(A+B)=90^{\circ}-\frac{1}{2}C$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\left[\frac{(a-b)}{a+b}\right]\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\left[\frac{(a-b)}{(a+b)}\right]\cot\frac{1}{2}C$$

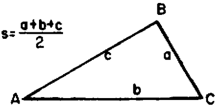
$$A=1/2(A+B)+1/2(A-B)$$
$$B=1/2(A+B)-1/2(A-B)$$

$$c=(a+b)\frac{\cos 1/2(A+B)}{\cos 1/2(A-B)}=\frac{a\,\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A}\ ,\quad c=(a-b)\frac{\operatorname{sen}1/2(A+B)}{\operatorname{sen}1/2(A-B)}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

$$\text{área}=1/2\ ab\,\operatorname{sen}C$$

Dados a, b y c, encontrar A, B y C

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$



$$\operatorname{sen}1/2A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos 1/2A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tang}1/2A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\operatorname{sen}A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$\operatorname{sen}1/2B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\ ,\quad \cos 1/2B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}\ ,\quad \operatorname{tang}1/2B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\operatorname{sen}1/2C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ ,\quad \cos 1/2C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\ ,\quad \operatorname{tang}1/2C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\text{área}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Números Complejos

Es un NUMERO COMPLEJO, la representación de un ENTE ABSTRACTO por un par de números reales cualquiera, dados en orden prefijado.

Siendo a y b, primero y segundo componentes del complejo α, se tiene:

$$\alpha=(a,b)$$

PROPIEDAD.

Son iguales los números (a,b) y (a',b'), cuando:

$$a=a'\ \text{ y }\ b=b'$$

de donde:

$$(5,\tfrac{1}{2})=(5,\tfrac{1}{2})\quad \text{y}\quad (5,\tfrac{1}{2})\neq(\tfrac{1}{2},5)$$

Para que los ENTES DEFINIDOS, comprendan como un caso particular a los números reales, por convención se adopta para cada número real, la expresión compleja $(a,0)$

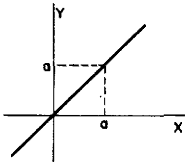
de donde:

O, tiene como expresión compleja (O,O)

Los números complejos NO REALES, se llaman IMAGINARIOS.
Son IMAGINARIOS PUROS, los números (O,bi), cuyo primer componente es nulo
Es UNIDAD IMAGINARIA cuando (O,1) y se representa por "i", por lo tanto:

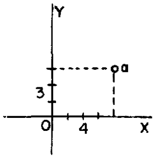
$$(0,1) = i$$

La representación gráfica de (a,a), en el campo complejo, se encuentra situada sobre el plano vector que pasa por el 3_o y el ler, cuadrantes.



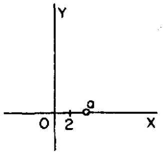
LA REPRESENTACION CARTESIANA DE LOS COMPLEJOS ES DE GRAN UTILIDAD, PUESTO QUE ESO PRECISAMENTE ES PARA LO QUE FUERON CREADOS, O SEA, QUE SIRVEN PARA REPRESENTAR UN NUMERO CUALQUIERA EN UN PLANO Y NO, SOBRE UN EJE.

En Analítica, cada punto del plano depende de sus coordenadas, pero en los complejos, estas coordenadas en conjunto, representan el punto requerido o sea que es una extensión de la recta al plano, que queda representado numéricamente cada punto del plano por el complejo (a,b) que compone sus dos coordenadas. Recíprocamente; todo complejo representa un número llamado <u>AFIJO del complejo</u>.

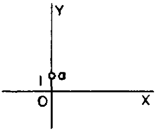


Cuando:

a(4, 3)._Es un número complejo COMPLETO.



a(2, O)._Es un número REAL. Caso de la recta.

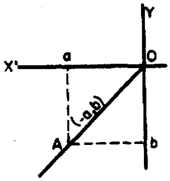


a(O, 1)._IMAGINARIO PURO

De donde:

X'X, eje REAL
Y'Y, eje IMAGINARIO

Es un VECTOR, todo segmento cuyos extremos se consideran en orden determinado, siendo el primero "el ORIGEN O" y el extremo o segundo "el COMPLEJO A", él cual puede quedar determinado dando sus dos proyecciones (componentes del vector), sobre los ejes y tiene como medida los primero y segundo componentes del complejo A, por lo tan to; en el plano cartesiano, siempre habrá una correspondencia unilateral entre un punto y un vector y cada uno puede tomarse como representante del otro, por lo tanto:



Una longitud, será siempre, un número real y positivo puesto que:

complejo A (a,b)

" O (0,0), de donde:

La longitud del segmento OA, es el número real y positivo "P", al cual se le llama MODULO o VALOR ABSOLUTO de P, de donde:

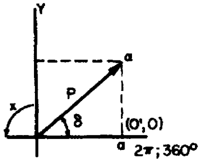
$P = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$, puesto que O y O no cuentan.

Módulo $= |P| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ó MODULO o VALOR ABSOLUTO del complejo A ó (a,b), de donde:

$$P = |A| = |a|$$

Adoptando como sentido de giro el contrário a las manecillas del reloj, a partir del eje X, se llama argumento del complejo A ó (a,b) al número δ, o sea, la medida del ángulo que OA forma con el eje X y será Argumento a, de donde:

Será un número medido entre 0° y 360° si se adopta la medida sexagesimal y si se adopta la medida cíclica, será entre 0° y 2π, quedando en este último caso el Vector complejo $= P\delta$



Algunas veces conviene considerar, no el valor δ que el vector forma con el semieje, sino cualquiera de los números $\delta + 2K\pi$, siendo $K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$ que miden los infinitos ángulos determinados por el origen +X con el extremo $\overline{OA}$.

Teniendo el argumento (δ) comprendido entre π y 2π, o sea:

$180° < \longrightarrow < 360°$, suele ser su argumento 2π (3_o y 4_o cuadrantes), de donde:

$$\delta - 2\pi \quad \text{cuando} \quad \begin{matrix} \delta = 225° \\ 2\pi = 360° \end{matrix}$$

$225° - 360° = -135°$, que es un número negativo y su valor absoluto es inferior a π, siendo $\pm$, según se encuentre en el 2o ó 3er cuadrante.

De lo anterior y proyectando, se tiene:

$a = (a,b)$

$a = P\cos\delta$, proyección sobre X

$b = P\,\text{sen}\,\delta$, " " Y

$$a = (P\cos\delta, P\,\text{sen}\,\delta)$$

Recíprocamente, teniendo a y b, se calculan r y δ por las relaciones, de donde:

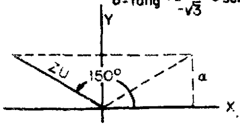
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\delta = \frac{a}{r}, \quad \text{sen}\,\delta = \frac{b}{r}, \quad \text{tang}\,\delta = \frac{b}{a}$$

Para calcular el δ (argumento), es necesario conservar los signos de a y b, para ver en que cuadrante queda el vector.

Siendo $a = (-\sqrt{3}, 1)$, calcular su módulo y argumento.

$P = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\delta = \text{tang}^{-1} = \frac{1}{-\sqrt{3}}$ ó $\text{sen}\,\delta = 1/2 = 0.5$



Pero como $\text{sen}^{-1} = 0.5 = 30°$ ó $150°$, $\delta = 150°$, por ser (−)

Números iguales, conjugados y opuestos.

Los números complejos r_δ y r_ψ son iguales, cuando sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en números exactos de circunferencia.

$$r = P \quad y \quad \delta = \psi + 2K\pi$$

Para que r_δ sea nulo, tienen que ser nulos sus dos componentes, o sea $r=0$ ya que el seno y el coseno no se anulan simultáneamente

Un complejo en forma POLAR, es nulo cuando su módulo es nulo.

Dos complejos que tienen el primer componente igual y el segundo opuesto, se llaman - CONJUGADOS.

(a,b) y $(a,-b)$, $(-1/2, \sqrt{2})$ y $(-1/2, -\sqrt{2})$, son CONJUGADOS

Tomando argumentos menores de π, resulta:

Dos complejos son conjugados cuando tienen módulos iguales y argumentos opuestos y;

Dos complejos son opuestos, cuando sus módulos son iguales y sus argumentos son diferentes en π o en un múltiplo impar de π.

Las potencias de i y de -i, son iguales en los números reales y en los imaginarios, son iguales y de signo contrario.

$$\frac{A_1+iB_1}{A_2+iB_2} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_2^2+B_2^2} + i\,\frac{B_1A_2-A_1B_2}{A_2^2+B_2^2} = \frac{A_1+iB_1}{A_2+iB_2} = X+iy$$

despejando, se tiene:

$$A_1+iB_1 = (A_2+iB_2)\quad(X+iy)$$

$$A_1+iB_1 = (A_2x-B_2y)+(B_2x+A_2y)i \therefore$$

$$A_2x-B_2y = A_1 \longrightarrow \text{NOTA:}$$

$$i(B_2X+A_2Y) = iB$$

Igualando partes reales con partes reales y partes imaginarias con partes imaginarias.

Potencias

La potencia entera y positiva de un factor complejo, se obtiene al elevar el módulo a la misma potencia y multiplicando el argumento por dicha potencia.

$$(\gamma, \theta)^n = (\gamma^n, n\theta)$$

Sumas

Siendo los complejos (a,b) y (a',b'), la suma de ellos es; $(a+a', b+b')$, que tiene como componentes la suma de los componentes de ambos, de donde:

$$(a,b)+(a',b') = (a+a', \; b+b')$$

$$\text{si } (5i,-4)+(4i,-5) = (9i,-9) = 9(i,-1),$$

$$(5,-4)+(4,-5) = (9,-9) = 9(1,-1) \therefore$$

$a = (a,0)$ y $a' = (a',0)$, de donde:

$(a,0)+(a',0) = (a+a',0)$, que es el resultado de la suma de números reales.

El producto de un complejo por un número real, se obtiene al multiplicar por éste, las dos componentes.

$$(a,b)m = (am, bm)$$

Resta

Dados dos complejos cualquiera α y α'

$\alpha = (a,b)$ y $\alpha' = (a',b')$, se tiene:

$(a-a', b-b')$, de donde:

$\alpha - \alpha'$

Expresión Binómica o Cartesiana de los complejos.

Todo complejo es una suma de un número real con otro imaginario puro.

$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib$, que es la forma BINOMICA de representar un complejo, siendo más usada que la forma (a,b) y equivale a descomponer un vector en sus dos proyecciones o componentes, sobre los ejes cartesianos.

Expresión polar.

Sustituyendo a y b, por sus valores, en la forma Binómica, se tiene:

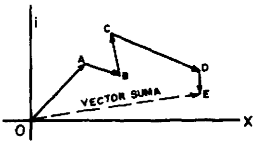
$P\cos\delta + Pi\,\mathrm{sen}\,\delta = P(\cos\delta + i\,\mathrm{sen}\,\delta)$, en donde se observa que aparece el número como producto de su módulo y un nuevo complejo de módulo 1

A esta expresión se le llama FACTORIAL O TRIGONOMETRICA

$P(\cos\delta + i\,\mathrm{sen}\,\delta)$

Representación geométrica de la suma.

Dados varios vectores,



se tiene:

$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{OE}$

o sea:

$\vec{OA_x} + \vec{AB_x} + \vec{BC_x} + \vec{CD_x} + \vec{DE_x} = \vec{OE_x}$ y

$\vec{OA_y} + \vec{AB_y} + \vec{BC_y} + \vec{CD_y} + \vec{DE_y} = \vec{OA_y}$

En el método analítico, el vector que representa una suma de números complejos, ES LA SUMA DE LOS VECTORES QUE REPRESENTAN LOS FACTORES.

Si la suma es algebraica (con sumas y restas), basta sustituir los vectores que éstos representan, por sus opuestos

Multiplicación.

$(a+bi)(c+di) = ac + a(di) + cbi + bidi = ac + ad\,i + bc\,i + bd.i^2 = (ac-bd) + (bc+ad)i.$

Se llama producto de un número complejo $(a+b) + (ad+bc)i$, al número;

$(ac-bd) + (ad+bc)i$, que resulta de multiplicarlos cada uno, uno a uno y sustituir $-i$ por -1

Los productos sucesivos de i, son:

$i = -\sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i = -\sqrt{-1}$, $i^4 = 1$ y a partir de éstos se repiten periódicamente los cuatro números $i, -1, -i$ y 1

Escribiendo los factores en forma factorial, se tiene:

$$P(\cos\delta + i\,\text{sen}\,\delta).P'(\cos\delta' + i\,\text{sen}\,\delta') = PP'(\cos\delta\cos\delta' - \text{sen}\,\delta\,\text{sen}\,\delta') + iPP'(\text{sen}\,\delta\cos\delta' + \cos\delta\,\text{sen}\,\delta') = [\cos(\delta+\delta') + i\,\text{sen}(\delta+\delta')]PP'$$

El módulo de un producto de dos complejos en forma polar, es igual AL PRODUCTO DE SUS MODULOS Y SU. ARGUMENTO, A LA SUMA DE LOS ARGUMENTOS.

$$(r\delta)(r'\delta') = rr'(\delta+\delta')$$

Un producto de complejos es NULO, cuando uno de sus factores sea igual a O. $rr'=0$ y si es núlo r o r', basta y sobra y es cierta para cualquier número de factores

División

Resulta inmediatamente de:

$(r\delta)(r'\delta') = rr'(\delta'+\delta')$, que da dos nuevos complejos $R\phi$ y $r\delta$ siendo el módulo $\neq 0$,

Existe un número único que multiplicado por $r\delta$ da como producto $R\phi$, de donde el cociente de $(R\phi)$ $(r\delta)$

$\frac{R\phi}{r\delta} = r'\delta'$, que tiene como módulo el cociente de los módulos y como argumento, la diferencia del argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

Si $s = \frac{a}{\beta}$, esto equivale a $s\beta = a$

Raíces de complejos.

Dado un complejo:

$P(\cos\delta + i\,\text{sen}\,\delta)$, ver si existe algún número complejo $P(\cos\psi + i\,\text{sen}\,\psi)$ cuya potencia $\underline{n}$ coincida con aquél;

$$P^n(\cos n\psi + i\,\text{sen}\,n\psi) = P(\cos\delta + i\,\text{sen}\,\delta)$$

Lo anterior se verifica, cuando los módulos son iguales y los argumentos difieren un número exacto de circunferencias.

$$P^n = e \;,\; n\psi = \delta + 2K\pi$$

$$P = \sqrt[n]{e} \;,\; \psi = \frac{\delta}{n} + \frac{2K\pi}{n} \quad \text{-------------} (1)$$

El módulo e de la raíz buscada está perfectamente determinado y la raíz $\underline{n}$ es la suma de e.

En cuanto al argumento en su expresión, figura un número indeterminado K, que puede recibir todos los valores enteros

Dando a K valores simples, se obtendrán los siguientes argumentos:

$$(\frac{\delta}{n})(\frac{\delta}{n}) + \frac{2\pi}{n} \;,\; \frac{\delta}{n} + 2\frac{2\pi}{n} \;,\; \ldots \frac{\delta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$ y la diferencia de cualquiera es:

$$(\frac{\delta}{n} + n\frac{2\pi}{n}) - (\frac{\delta}{n} + n'\frac{2\pi}{n}) = (n-n')\frac{2\pi}{n}$$

Raíces de los números reales -en particular-

Dado un número positivo a y su origen en O, sus raíces $\underline{n}$ tienen como argumento:

$$0 \;,\; \frac{2\pi}{n} \;,\; 2\frac{2\pi}{n} \;\cdots\; (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

Si es par, el índice $n = 2n'$, se obtienen dos raíces reales de argumentos 0, y $\frac{n\pi}{n} = \pi$, o sea que una raíz es positiva y otra es negativa.

$\sqrt[n]{a}\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = \sqrt[n]{a}$, que son valores conocidos.

Si n es impar, sólo se obtiene una raíz real y positiva de argumento π

Los argumentos de las raíces son:

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \ldots \frac{(2K-1)\pi}{n} \ldots \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

Para distinguir la raíz real o aritmética definida de la raíz general, se tiene:

$$\sqrt[n]{((a))} = \sqrt[n]{a}\,(\cos \frac{2K\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{n})$$

si $a=1$

$$1 = \sqrt{((a))} = \cos \frac{2K\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{n} \quad (K=0,1,2,\ldots)$$

forma que da las raíces n d 1 si n es par o las raíces de ± 1, si n es impar, resulta $+1$

Los AFIJOS de las n raíces de 1, son los vértices de un polígono regular de n lados y radio 1

Los PRODUCTOS, COCIENTES y POTENCIAS de las raíces n de 1, son también raíces n de 1

$$\alpha^n = 1 \;, \quad \beta = 1 \quad ; \quad \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$$

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = (\frac{\alpha}{\beta})^n = 1 \quad ; \quad (\alpha^p)^n = (\alpha^n)^p = 1$$

ESCOLIO.

Cuando: $\sqrt[n]{((a))} = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{((1))} = 1$

Las raíces n de cualquier número complejo, se reducen a las raíces n de la unidad.

Raíces primitivas de la unidad.

Las raíces n de 1, se dividen en dos clases; las raíces de 1 de orden inferior a n, llamadas PRIMITIVAS DE ORDE N, y las de orden menor que n e i y por lo tanto es cada una primitiva de cierto orden $n' < n$

$$i^1 = i \;, \; i^2 = -1 \;, \; i^3 = -i \;, \; i^4 = 1$$

Derivadas.

Incremento de una función, es el EXCESO DEL VALOR FINAL SOBRE EL INICIAL, o la diferencia entre el valor de la función cuando la variable REPRESENTA SU VALOR FINAL y el VALOR DE DICHA FUNCION CORRESPONDIENTE AL VALOR INICIAL DE LA VARIABLE.

Si la variable x pasa de un valor inicial a, a un valor final b, la diferencia $b-a$, se llama INCREMENTO DE LA VARIABLE x.

Si una función y pasa de un valor inicial y_1, a uno final y_2, la diferencia $y_2 - y_1$, se llama INCREMENTO DE LA FUNCION.

Sea la función $y = x^3$ y x', un valor determinado de la variable x

Si $x_1 = 2$, $y_1 = x_1^3 = 8$

Si x recibe un incremento $h = 2$

$y_2 = (x_1 + h)^3 = (2+2)^3 = 64$, siendo en este caso, el incremento recibido por la función:

$64 - 8 = 56$

La letra griega Δ antepuesta a la variable, sea independiente o función, significa el incremento, de donde:

Δx , Δx^3, significan respectivamente, el incremento de la variable

x y el incremento de la función x^3

Derivada de una función.

Para un valor determinado de la variable, la derivada de la función, es el <u>límite</u> hacia el cual tiende la razón del incremento de la función al incremento de la variable, cuando ambos tienden a cero.

Anteponiendo la letra D, a una función, se indica la derivada de dicha función, de donde:

Dx^2 · la derivada de la función x^2 y para expresar que 4 es el valor de dicha derivada y para el valor 2 de la variable x, se escribe:

$$\underset{x=2}{Dx^2} = 4$$

En los siguientes valores:

x^2, una función de la variable x
$x_1 = 2$, un valor determinado de dicha función
h, el incremento de la variable
$(x_1+h)^2$, la función incrementada
$(x_1+h)^2 - x_1^2 = K$, el incremento de la función

Tabulando, se tiene:

x_1	x_1^2	h	$(x_1+h)^2$	$(x_1+h)^2 - x_1^2 = K$	K/h
2	4	3.0	25.00	25.00 -4 = 21.00	21.00/3 = 7.0
2	4	2.0	16.00	16.00 -4 = 12.00	12.0/2 = 6.0
2	4	1.0	9.00	9.00 -4 = 5.00	5.00/1 = 5.0
2	4	.5	6.25	6.25 -4 = 2.25	2.25/.5 = 4.5
2	4	.1	4.41	4.41 -4 = .41	.41/.1 = 4.1
2	4	.01	4.0401	4.0401 -4 = .0401	.0401/.01 = 4.01
2	4	.001	4.004001	4.004001 -4 = .004001	.004001/.001 = 4.001

De donde se deduce:

Cuando la variable pasa del valor 2 al 5, la función pasa del valor 4 al 25 y su incremento es 21, el intervalo de <u>dos</u> a <u>cinco</u> crece en término medio, con una rapidez igual a la de la variable x multiplicada por 7.

Cuando la variable aumenta en 2, la función aumenta en 12, el intervalo de dos a cuatro crece en término medio, igual a la de la variable x multiplicada por 6 y así sucesivamente, de donde:

La rapidez media o número que expresa cuanto más rápidamente crece la variable, se conserva constantemente superior a 4 cuanto más se acerca el incremento de la variable a 0.

Se llama DERIVADA DE LA FUNCION, al límite de la rapidez media

Algunas veces se designa con <u>h</u>, al incremento de la variable independiente y con <u>K</u>, al de la función.

De lo anterior se deduce:

Que para obtener la derivada de una función hay que efectuar las siguientes operaciones sin variar el orden;

1º_ LA FUNCION INCREMENTADA.
2º_ EL INCREMENTO DE LA FUNCION.
3º_ LA RAZON DE LOS INCREMENTOS y
4º_ EL LIMITE A QUE TIENDE DICHA RAZON CUANDO EL INCREMENTO DE LA VARIABLE TIENDE A 0.

En la función:

$y = \text{sen } x$, siendo h el incremento de la variable y K el incremento de la función, se tiene:

La función incrementada

$$y + K = \text{sen}(x+h)$$

Incremento de la función.

$$K = \text{sen}(x+h) - \text{sen } x = 2 \text{ sen } h/2 \cos(x + h/2)$$

Razón de los incrementos.

$$K/h = \frac{2 \text{ sen } h/2 \cos(x + h/2)}{h} \quad \text{ó}$$

dividiendo entre 2, los dos términos del segundo miembro:

$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{sen} h/2}{\frac{h}{2}} \cos(x-h/2)$$

Límite de la razón de los incrementos.

Teniendo en cuenta que el límite de la razón del seno de un ángulo al mismo ángulo, es 1 cuando el ángulo tiende a O y que el límite de $\cos(x-h/2)$, es $\cos x$, cuando h tiende a O, resulta:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x$$

Inversamente

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x$$ y así sucesivamente.

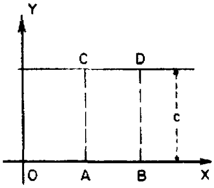
Derivada de las funciones algebraicas

DERIVADA DE UNA CONSTANTE "C"

$y = C$

$OA = a$, un valor determinado de la variable independiente x.

$AB = h$, un incremento arbitrario de dicha variable.



$y+k=c$, función incrementada.

$k=0$, incremento de la función.

$k/h=0$, razón de los incrementos.

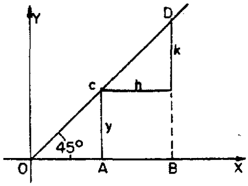
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{k}{h} = D_x c = 0$, valor de la derivada.

de donde:

LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE ES O

de donde se observa que $y = c$, es una paralela a X'X y la diferencia entre dos ordenadas correspondientes a las abscisas "a" y "a+h", es cero. Siendo nulo el incremento de la ordenada o función, la derivada es cero

DERIVADA DE UNA VARIABLE CON RESPECTO A SI MISMA.



Sea $D_x X$

si $y=x$

$y+k=x+h$

$k=h$

$k/h=1$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{k}{h} = 1 = D_x X$

La fig., indica que $k/h = \tan 45° = 1$, cualquiera que sea el valor de h, por lo tanto:

LA DERIVADA DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE CON RESPECTO A SI MISMA, ES 1

DERIVADA DE UNA POTENCIA DE X

Si $y = x^m$

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = mX^{m-1}$$

por lo tanto:

$$D_x X^m = mX^{m-1}$$

Si $y = X^{-m}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = -mX^{-m-1} \quad \therefore \; D\, X^{-m} = -mX^{-m-1}$$

Si $y = X^{\frac{r}{s}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\frac{r}{s}x^{\frac{r}{s}-1} \quad \therefore D_x x^{\frac{r}{s}}=\frac{r}{s}x^{\frac{r}{s}-1}$$

En consecuencia:

PARA OBTENER LA DERIVADA DE UNA POTENCIA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE, MULTIPLIQUESE POR EL GRADO Y DIVIDASE ENTRE LA VARIABLE YA SEA EL EXPONENTE, POSITIVO O NEGATIVO, ENTERO O FRACCIONARIO.

DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES, ES IGUAL A LA SUMA ALGEBRAICA DE LAS DERIVADAS DE ESAS FUNCIONES.

Sean:

$$U=f_1(x)\ ,\ V=f_2(x)\ ,\ Z=f_3(x)$$

$$D_x=(U+V+Z)=D_xU+D_xV+D_xZ$$

DERIVADA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES, ES IGUAL A LA PRIMERA POR LA DERIVADA DE LA SEGUNDA, MAS LA SEGUNDA POR LA DERIVADA DE LA PRIMERA.

Sean:

$U=f(x)$ y $V=f(x)$ y su producto $y=UV$

$$D_xUV=UD_xV+V\,D_xU$$

LA DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCION, ES IGUAL A LA CONSTANTE POR LA DERIVADA DE LA FUNCION.

LA DERIVADA DEL PRODUCTO DE VARIAS FUNCIONES, ES IGUAL A LA SUMA DE LOS PRODUCTOS DE LA DERIVADA DE CADA FUNCION POR LAS DEMAS FUNCIONES.

U, V y Z, funciones con igual variable independiente.

$y=UVZ$, su producto.

de donde:

$$D_x UVZ=UVD_xZ+UZD_xV+VZD_xU$$

DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCIONES, ES LA DERIVADA DE LA FUNCION (y), CON RESPECTO A LA FUNCION INTERMEDIA (u), MULTIPLICADA POR LA DERIVADA DE ESTA CON RESPECTO A LA VARIABLE INDEPENDIENTE x.

SI:

$$y=U^n$$

$$D_x y=D_u y\ D_x U$$

DERIVADA DE UN COCIENTE.

Si:

$$y=\frac{U}{V}$$

$$D_x\frac{U}{V}=\frac{VD_xU-UD_xV}{V^2} \qquad \text{o sea:}$$

EL PRODUCTO DEL DENOMINADOR POR LA DERIVADA DEL NUMERADOR, MENOS EL PRODUCTO DEL NUMERADOR POR LA DERIVADA DEL DENOMINADOR, DIVIDIDO TODO, POR EL CUADRADO DEL DENOMINADOR.

LA DERIVADA DE UN RADICAL DE SEGUNDO ORDEN, ES IGUAL A LA DERIVADA DEL RADICAL, ENTRE EL DUPLO DEL RADICAL.

$y=\sqrt{u}$, en donde; $u=f(x)$

se tiene:

$$D_x\sqrt{u}=\frac{D_xu}{2\sqrt{u}}$$

cuando:

$$y=\sqrt[m]{u}\ ;\quad D_x\sqrt{u}=\frac{D_x u}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

LA DERIVADA DE UNA FUNCION EXPONENCIAL ES IGUAL A LA FUNCION MISMA, MULTIPLICADA POR EL LOG. NATURAL DE LA BASE Y POR LA DERIVADA DEL EXPONENTE, CALCULADA CON RESPECTO A x.

Si a^u, cuando $u=f(x)$

$$D_x\, a^u = a^u \,\mathrm{L}a\, D_x u$$

Si $a=e$

$$D_x\, e^u = e^u D_x u$$

DERIVADA DE UNA FUNCION LOGARITMICA

Siendo $y = \mathrm{L}u$

$$D_x\, \mathrm{L}u = \frac{D_x u}{u}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARITMICAS

Derivada del seno de un ángulo.

$D_x \operatorname{sen} u = \cos u\, D_x u$, cuando $u=f(x)$ e $y = \operatorname{sen} u$

cuando $D_x \operatorname{sen}^m u = m \operatorname{sen}^{m-1} u \cos u\, D_x u$

Derivada del coseno de un ángulo.

$$D_x \cos u = -\operatorname{sen} u\, D_x u$$

cuando $D_x \cos^m u = -m \cos^{m-1} u \operatorname{sen} u\, D_x u$

Derivada de la tangente de un ángulo.

$$D_x \operatorname{tang} u = \sec^2 u\, D_x u$$

cuando $D_x \operatorname{tang}^m u = m \operatorname{tang}^{m-1} u \sec^2 u\, D_x u$

Derivada de la cotangente de un ángulo.

$$D_x \cot u = \csc^2 u\, D_x u$$

cuando $D_x \cot^m u = -m \cot^{m-1} u \csc^2 u\, D_x u$

Derivada de la secante de un ángulo.

$$D_x \sec u = \operatorname{tang} u \sec u\, D_x u$$

cuando $D_x \sec^m u = m \sec^{m-1} u \operatorname{tang} u\, D_x u$

Derivada de la cosecante de un ángulo.

$$D_x \csc u = -\cot u \csc u\, D_x u$$

cuando $D_x \csc^m u = -m \csc^{m-1} u \cot u\, D_x u$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES INVERSAS.

La derivada de una función es recíproca de su inversa.

Derivada del ángulo sen u

$y =$ ángulo sen u

$u = \operatorname{sen} y$

$$D_x \text{áng} \operatorname{sen} u = \frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Derivada del ángulo cos u

$$D_x \text{áng} \cos u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Derivada del ángulo secante u

$$D_x \text{áng} \sec u = \frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Derivada del ángulo tangente u

$$D_x \text{áng} \operatorname{tang} u = \frac{D_x u}{1+u^2}$$

Derivada del ángulo cosecante u

$$D_x \text{áng} \csc u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Derivada del ángulo cotangente u

$$D_x \text{áng} \cot u = -\frac{D_x u}{1+u}$$

DERIVADA DE LAS FUNCIONES IMPLICITAS

$$= -\frac{D_x f(x,y)}{D_y f(x,y)}$$

Determinantes.

DETERMINANTE, es un conjunto de números que colocados sistemáticamente dentro de un símbolo, representa un conjunto de operaciones, con las siguientes características matemáticas.

TEOREMAS

Un determinante de cualquier orden es nulo, si son nulos todos los términos de una fila o de una columna (el orden del determinante lo da, el número de filas o columnas)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante de 3er. orden. por tener 3 filas y 3 columnas y es nulo por ser nula una fila o una columna.

Permutando dos filas o columnas adyacentes, el determinante cambia de signo conservando su mismo valor.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

En un determinante pueden cambiarse las columnas por filas o las filas por columnas sin alterar su valor.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Cuando un determinante tiene dos filas o columnas iguales, su valor es nulo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si en un determinante se multiplican todos los términos de una fila o de una columna, éste quedará dividido por dicho factor, sin alterar su valor.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1/n \begin{vmatrix} a_1 & na_2 & a_3 \\ b_1 & nb_2 & b_3 \\ c_1 & nc_2 & c_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} 1/na_1 & 1/na_2 & 1/na_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Cuando un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su valor es nulo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & na_1 & a_3 \\ b_1 & nb_1 & b_3 \\ c_1 & nc_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Un determinante de cualquier orden, no cambia ni se altera de valor, cuando a todos los términos de una fila o de una columna se le suman o restan los términos correspondientes de cualquiera de las otras columnas, previamente multiplicadas por cualquier factor

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - na_1 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 - nb_1 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - nc_1 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 - nd_1 & d_4 \end{vmatrix}$$

es un determinante de 4° orden

EJEMPLO:

$$\begin{array}{l} D = \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \\ 0 & 11 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & 6 & 14 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \end{array}$$

multiplicando la columna (1) por -2 y sumando con la (4) resulta =

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & \boxed{0} \\ 3 & -2 & -5 & \boxed{0} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 2} & & & \boxed{5} \\ 7 & -3 & 6 & \boxed{0} \end{vmatrix}$$

sacando a 5 como factor resulta $= -5 \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 7 & -3 & +6 \end{vmatrix}$

$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array}$

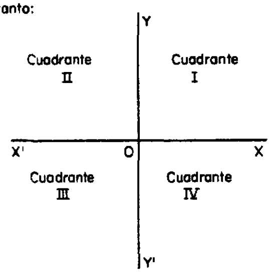
multiplicando la columna(2) por +2 y sumando con la(3) resulta $= -5 \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & -9 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ sumando las filas (1) y (2) resulta $= -5 \begin{vmatrix} 2 & 5 & \boxed{9} \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ sacando como factor a 9 resulta =

$$(-5)(9) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = (-5)(9)(-15-21) = -45(-36) = 1620$$

Analítica

Cuadrantes:

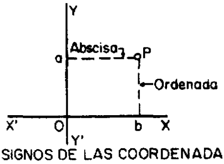
Las rectas X'X y YY', perpendiculares entre sí, dividen al plano en cuatro partes iguales – llamadas CUADRANTES y el sentido de lectura es al contrario de las manecillas del reloj, por lo tanto:



La recta horizontal X'X, es el eje de las Xs y la vertical YY', el eje de las Ys. Su intersección O, se llama ORIGEN.

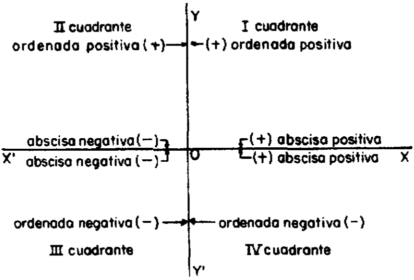
COORDENADAS.

La posición de un punto en un plano, es fijada por sus distancias a los ejes. Dichas distancias se llaman COORDENADAS del punto

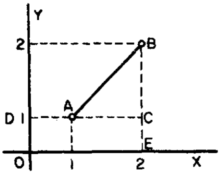


ABSCISA de un punto P, es la distacia <u>aP</u>.
ORDENADA de un punto P, es la distancia <u>bP</u>.
La abscisa y la ordenada del punto P, se llaman COORDENADAS RECTILINEAS o CARTESIANAS

SIGNOS DE LAS COORDENADAS.



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.



$A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, puntos extremos de la recta AB y cuya distancia (entre A y B), se desea calcular.

AC, paralela a OX

BC, paralela a OY y perpendicular a OX

ACB, es triángulo rectángulo, por lo tanto:

$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$ ------ (1)

como $AC = CD - DA = x_2 - x_1$ y

$CB = EB - EC = y_2 - y_1$, sustituyendo en (1)

se tiene:

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad y \quad AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Intercambiando x_2 y x_1, y_2 e y_1, el valor de AB no varía, puesto que:

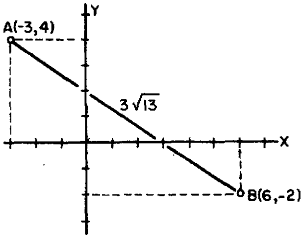
$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, por lo tanto:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Si uno de los puntos es el ORIGEN y el otro es $A(x_1, y_1)$, la distancia A al origen es:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Calcular la distancia AB, cuando $A(-3,4)$ y $B(6,-2)$



$\overline{AB}^2 = (6+3)^2 + (-2-4)^2 = 81 + 36 = 117$

$\therefore AB = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

$(117 = 9 \times 13$ y como $3 = \sqrt{9}$, queda: $\sqrt{117} = 3\sqrt{13})$

Calcular las coordenadas de $P(x_1, y_1)$, equidistante de $A(9,3)$, $B(3,7)$ y $C(-2,6)$.

en donde:

$PA = PB = PC$, o sea:

$$\sqrt{(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2} = \sqrt{(x_1-3)^2 + (y_1-7)^2} = \sqrt{(x_1+2)^2 + (y_1-6)^2}$$

Elevando al cuadrado cada uno de los dos primeros radicales:

$$(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2 = (x_1-3)^2 + (y_1-7)^2$$

Quitando paréntesis:

$$x_1^2 - 18x + 81 + y_1^2 - 6y + 9 = x_1^2 - 6x + 9 + y_1^2 - 14y + 49$$

Ordenando y reduciendo

$$x_1^2 - x_1^2 - 18x_1 + 6x_1 + y_1^2 - y_1^2 - 6y_1 + 14y_1 = 9 - 9 + 49 - 81$$
$$-12x_1 + 8y_1 = -32$$

Dividiendo entre 4 y cambiando signos:

$$3x_1 - 2y_1 = 8 \text{ ---------- } (1)$$

Elevando al cuadrado el primero y tercer radical y reduciendo:

$$11x_1 - 3y_1 = 25 \text{ ----------- } (2)$$

Resolviendo (1) y (2)

multiplicando (1) por 11 y (2) por 3:

$$11x_1 - 3y_1 = 25$$
$$3x_1 + 2y_1 = 8$$

de donde

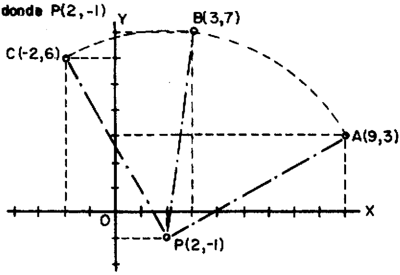
restando

$$22x_1 - 6y_1 = 50$$
$$9x_1 - 6y_1 = 24$$
$$13x_1 = 26$$
$$\therefore \quad x_1 = \frac{26}{13} = 2$$

Sustituyendo en (2) a x_1 por su valor:

$$-2y = 8 - 6$$
$$\therefore \quad -y = \frac{2}{-2} = -1$$

de donde P(2, -1)



AREAS POSITIVAS Y NEGATIVAS.

Un móvil puede recorrer el contorno o perímetro de un polígono cualquiera de izquierda a derecha (sentido positivo), o de derecha a izquierda (sentido negativo).

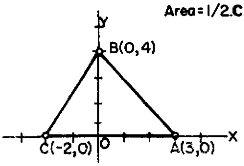
AREA DE UN TRIANGULO

Conociendo las coordenadas de los vértices de un triángulo, puede calcularse su superficie en función de dichas coordenadas.

En el triángulo ABC, sus coordenadas son:

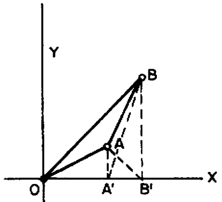
A(3,0) , B(0,4) , C(-2,0), de donde:

Area = 1/2.CA.OB = 20/2 = 10 u^2



Cuando el triángulo tiene uno de sus vértices en el origen y las coordenadas de sus otros vértices son:

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$



Proyectando los puntos A y B sobre el eje de las Xs., se obtienen los puntos A', B'.

de donde:

$$OAB = OA'B - OA'BA \text{ ----- } (1)$$

Area de $OA'B = 1/2\,(OA')(BB') = 1/2\,(x_1 , y_2)$ ------ (2)

El cuadrilátero OA'BA, comprende el triángulo OA'B, más el triángulo AA'B, el cual es equivalente al triángulo AA'B' por tener la misma base e igual altura, por lo que éste cuadrilá tero es equivalente al triángulo OB'A, de donde:

Area $OA'BA$ = Area $OB'A = 1/2\, OB' . A'A = 1/2 (x_2 , y_1)$ ----- (3)

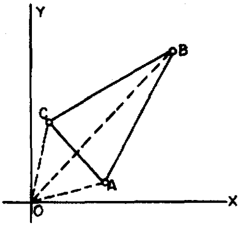
sustituyendo (2) y (3) en (1), se tiene:

$$\text{Area } OAB = 1/2\,(x_1 , y_2 - x_2 , y_1)$$

Expresado en Determinante, se tiene:

$$\text{Area } OAB = 1/2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 1/2\,(x_1 , y_2 - x_2 , y_1)$$

Cuando el triángulo no tiene ningún vértice en el origen.



$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

uniendo los vértices con el origen se forman los trián gulos OAB, OBC y OAC, de donde:

$$ABC = OAB + OBC + OAC$$

sustituyendo los valores como en el caso anterior, se tiene:

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}(x_1 , y_2 - x_2 , y_1) + \frac{1}{2}(x_2 , y_3 - x_3 , y_2) + $$

$$+ \frac{1}{2}(x_3 , y_1 - x_1 , y_3) \text{, de donde:}$$

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}\,(x_1 , y_2 - x_2 , y_1 + x_2 , y_3 - x_3 , y_2 + x_3 , y_1 - x_1 , y_3)$$

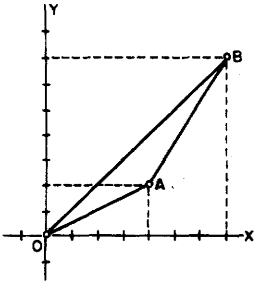
o en Determinante.

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Restando sucesivamen la primera fila de cada una de las siguiente queda:

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

AOB, triángulo supuesto y sus coordenadas en A(4, 2) y en B(7, 9)

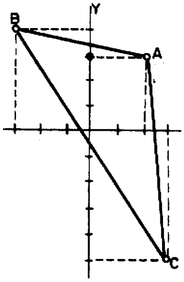


de donde:

$$\text{Area } OAB = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(36 - 14) =$$

$$= \frac{22}{2} = 11\ u^2$$

ABC, triángulo supuesto y sus coordenadas en A(2,3), en B(-3,4) y en C(3,-5)



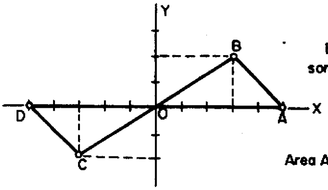
de donde:

$$\text{Area ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(15+9+8)-(-9+12-10)\right] = \frac{1}{2}(32+7) =$$

$$= \frac{39}{2} = 19.5\, u^2$$

AREA NULA.



En la fig. OABCD, sus coordenadas son:

A(0,5), B(3,2), C(-3,-2) y D(-5,0)

en donde, el triángulo OAB, es igual al triángulo ODC ∴

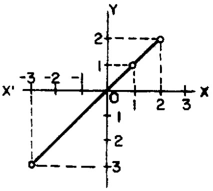
Area ABCD = 5 - (+5) = 0

ECUACIONES Y SUS REPRESENTACIONES

Ecuaciones de un lugar geométrico

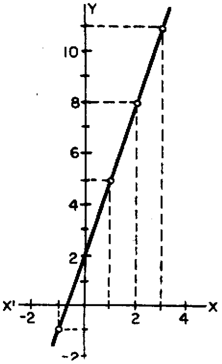
La expresión y=x, indica ser un lugar geométrico en donde cada uno de sus puntos tienen coordenadas iguales, o sea:

Si y=1, x=1, si y=2, x=2, si y=-3, x=-3, etc



La expresión y=3x+2, está indicando que para cada punto, la ordenada, es el triple de la abscisa aumentado en 2, de donde:

Cuando x=1, y=3+2=5
x=2, y=6+2=8
x=3, y=9+2=11
x=-1, y=-3+2=-1



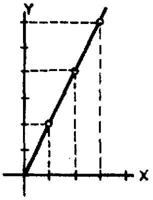
La expresión $y^2=4x$, indica que para cada punto, el cuadrado de la ordenada es el cuádruplo de la abscisa de dicho punto, de donde:

$y=2\sqrt{x}$ ∴

cuando $x=1$, $y=2$

$x=2$, $y=4$

$x=3$, $y=6$



En consecuencia:

LA ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO, ES LA EXPRESION QUE INDICA LA CONEXION QUE DEBE EXISTIR ENTRE LAS COORDENADAS DE UN PUNTO Y CIERTAS CANTIDADES CONSTANTES PARA QUE DICHO PUNTO SEA DE ESE LUGAR GEOMETRICO.

Existen dos clases de cantidades; CONSTANTES (absolutas o arbitrarias) y VARIABLES (independientes y dependientes).

En la ecuación:

$y=x^2-12x+32$, se observa que; a todo cambio de x corresponde otro para y, por lo tanto:

x = la variable INDEPENDIENTE y

y = la variable DEPENDIENTE

En la ecuación de una circunferencia $x^2+y^2=a^2$, la magnitud del radio a, varía según sea el problema a que se refiera, puesto que es solución a varios problemas, de donde y para distinguir a estas constantes arbitrarias se le llaman PARAMETROS.

A la variable dependiente se le llama FUNCION

La dependencia de una variable con respecto a otra, se expresa:

$y=f(x)$, $y=F(x)$, $y=\phi(x)$, etc.

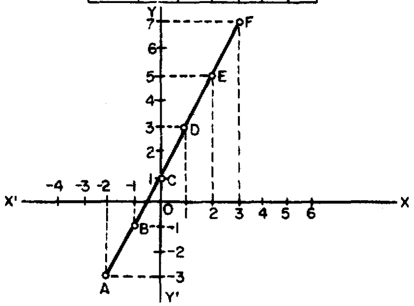
Las funciones pueden representarse por métodos Cartesianos.

Cuando en una ecuación no intervienen más variables que la x y la y, se trata de una ecuación en coordenadas Cartesianas.

Siendo la función $y=2x+1$; para trazar la gráfica que represente el lugar de la ecuación, se dan valores a la variable independiente x, haciéndolo de $-\infty$ a $+\infty$ y se calculan los valores correspondientes de la función.

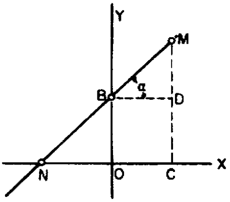
Puntos	A	B	C	D	E	F
x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5	7

de donde:



ECUACION DE LA RECTA.

M(x,y), un punto móvil cualquiera de la recta MN.



de donde:

$y = CM = CD + CM$ ---------- (1)

$CD = OB = b$ ------------ (2)

Por el triángulo BDM, $\frac{DM}{BD} = \text{tang}\,\alpha$

haciendo tang $\alpha = m$, se tiene:

$\frac{DM}{BD} = m \therefore DM = m.BD = mx$ ---(3)

sustituyendo (2) y (3) en (1)

$y = mx + b$ = ecuación de la recta en su forma mas simple.

Sustituyendo m por $-\frac{A}{B}$ y b por $-\frac{C}{B}$, se tiene:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, de donde:

$Ax + By + C = 0$ = ecuación GENERAL de la recta; de donde:

Si $A=0, B\neq 0, C=0$

$By=0$ ó $y=0$ (eje de las Xs).

Si $A\neq 0, B=0, C=0$

$Ax=0$ ó $x=0$ (eje de las Ys).

Si $A=0, B\neq 0, C\neq 0$

$By=-C$ ó $y=-\frac{C}{B}=b$ (es una paralela al eje de las Xs).

Si $A\neq 0, B=0, C\neq 0$

$Ax=-C$ ó $x=-\frac{C}{A}$ (es una paralela al eje de las Ys).

Si $A\neq 0, B\neq 0, C=0$

$By=-Ax$ ó $y=-\frac{A}{B}x = mx$ (es una recta que pasa por el orígen) y

Si $A\neq 0, B\neq 0, C\neq$, en éste caso, la ecuación es $Ax+By+C=0$.

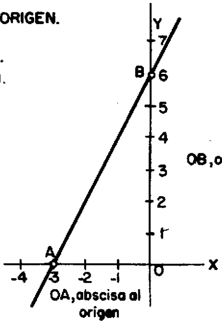
De lo anterior se deduce que; TODA ECUACION ALGEBRAICA DE PRIMER GRADO REPRESENTA UNA RECTA.

ORDENADAS Y ABSCISAS AL ORIGEN.

En la ecuación $y=2x+6$

Si $x=0$, $y=6$, de donde B(0,6).

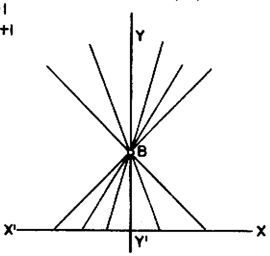
Si $y=0$, $x=-3$, " " A(-3,0).



OB, ordenada al origen.

COEFICIENTE ANGULAR O PENDIENTE DE UNA RECTA.

$y = x+1$
$y = 2x+1$
$y = 4x+1$ siendo en todos $B(0,1)$, se tiene:
$y = -x+1$
$y = -5x+1$



y se observa que todas pasan por el punto B(0,1) pero con inclinación diferente con respecto al eje de las Xs, formando ángulos diferentes, dependiendo en su magnitud del coeficiente de x, de donde recibe el nombre de coeficiente angular de la recta.

Si $m>0$, la recta forma con X'X un ángulo agudo y si $m<0$, forma un ángulo obtuso

PENDIENTE DE UNA RECTA, ES LA TANGENTE DEL ANGULO FORMADO POR LA RECTA CON LA DIRECCION POSITIVA DEL EJE DE LAS Ys.

La PENDIENTE es un NUMERO y la INCLINACION, un ANGULO

ECUACION DE LA RECTA POR DETERMINANTE

Conocidos los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$

Por el método de DETERMINANTES, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

en donde x e y, son los valores correspondientes a la recta.

Este determinante se formó, colocando en la primera columna, los valores de las x, en la segunda columna, los valores de las y y en la tercera columna, valores unitarios

Para resolver un determinante de 3er. orden, se reduce éste a una suma de determinantes de segundo orden (llamado METODO DE MENORES)

Para formar la suma de determinantes de 2°. orden, se hace lo siguiente:

a) Se toma a x como factor y anulando su fila y su columna se toman los valores restantes para formar el 1er. determinante de 2°. orden, o sea:

$$\Delta \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & y & 1 \\ \hline x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \Delta = x\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} (2) & (3) \end{array}$$

b) Se toma a y como factor y anulando su fila y su columna se toman los valores restantes para formar el 2° determinante de 2° orden, o sea:

$$\Delta = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & y & 1 \\ \hline x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \Delta = x\overset{(1°)}{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}} + y\overset{(2°)}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} \qquad y$$

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} (2) & (3) \end{array} \quad \begin{array}{cc} (3) & (1) \end{array}$$

c) Tomando como factor a 1 y anulando su fila y su columna se toman los valores restantes para formar el 3° y último determinante de 2° orden, o sea:

$$\Delta = \underset{(1)\ (2)\ (3)}{\begin{vmatrix} x & y & \boxed{1} \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}} = x \overset{1^\circ}{\underset{(2)\ (3)}{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}} + y \overset{2^\circ}{\underset{(3)\ (1)}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}}} + 1 \overset{3^\circ}{\underset{(1)\ (2)}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}}$$

nótese el orden de las columnas

de donde:

Para resolver un determinante de 2°, se multiplican los componentes de éste, en diagonal correspondiendo el signo positivo a la diagonal que va hacia abajo y el signo negativo a la diagonal que va hacia arriba, o sea:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^{-}_{+} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 b_1)$$

Resolviendo el determinante anterior, se tiene:

$$\Delta = x(y_1 . 1 - y_2 . 1) + y(1 . x_2 - 1 . x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

La solución de este determinante, contiene todos los elementos que forman la ecuación de una recta o sea $Ax + By + C = 0$ por lo tanto es condición que $\Delta = 0$ $\therefore$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \;\therefore$$

de donde:

$$y = + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

haciendo:

$$+ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a \quad y \quad + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} = b$$, sustituyendo, se tiene:

$y = ax + b$, que es la ecuación general de la recta.

Dando valores a $P(2,9)$ y $Q(-1,3)$, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

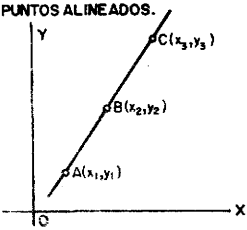
$= x(9-3) + y(-1-2) + (6+9)$

$0 = 6x + 3y + 15$, dividiendo entre 3, se tiene:

$0 = 2x + y + 5$, de donde:

$y = 2x + 5$, que es la ecuación buscada

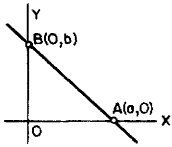
PUNTOS ALINEADOS.



La pendiente de la recta ABC, es:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

ECUACION DE LA RECTA EN FORMA SIMETRICA.



La ecuación de la recta AB, es de la forma:

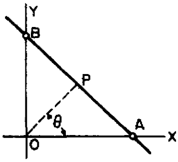
$y = mx + b$ ------- (1)

pero, como $m = -\frac{b}{a}$, este valor sustituido en (1), da:

$y = -\frac{b}{a}x + b$, de donde; dividiendo entre b y pasando al primer miembro el término en x, se tiene:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, que es la ecuación pedida.

ECUACION DE LA RECTA EN FORMA NORMAL.



La ecuación de la recta en su forma normal o de "HESSE", es:

$x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = P$

CAMBIO DE LA FORMA GENERAL A LA NORMAL.

Sea $Ax + By + C = 0$, la cual para escribirla en su forma normal, deben sustituirse los coeficientes A y B, por dos números tales que representen respectivamente el coseno y el seno del ángulo θ

Dividiendo los dos miembros por K (constante por determinar), se tiene:

$\frac{A}{K} = \cos\theta$; $\frac{B}{K} = \theta$ y sustituyendo en $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se tiene:

$\frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2} = 1$, de donde: $K = \sqrt{A^2 + B^2}$, quedando la ecuación original:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Si $\cos\theta = \frac{P}{OR} = \frac{P}{a}$, es siempre del mismo que la abscisa al origen a con signo contrario al de C

Como las coordenadas de A(a,O), satisfacen la ecuación, sustituyendo x e y por a y O, se tiene:

$Aa + C = 0$, de donde:

$a = \frac{C}{A}$.

PARALELISMO.

Dos rectas son paralelas, cuando sus pendientes son iguales.

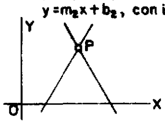
PERPENDICULARIDAD

Las pendientes de dos rectas perpendiculares, son recíprocas y de signos contrarios

INTERSECCION DE DOS RECTAS.

Sean; $y = m_1x + b_1$

$y = m_2x + b_2$, con intersección en $P(x_1, y_1)$



las coordenadas de P, satisfacen las dos ecuaciones, por lo tanto:

$y_1 = m_1x_1 + b_1$ -------- (1)

$y_2 = m_2x_2 + b_2$ -------- (2)

Restando (2) de (1).

$$0=(m_1-m_2)x_1+b_1-b_2 \quad \text{, de donde:}$$

$$x=\frac{b_2-b_1}{m_1-m_2} \text{ --------- } (3)$$

Sustituyendo (3) en (1).

$$y_1=m_1\frac{b_2-b_1}{m_1-m_2}+b_1 \quad ,$$

$$y=\frac{m_1b_2-m_2b_1}{m_1-m_2}$$

Cuando $m_1\neq m_2$, $b_1\neq b_2$, se tiene un sistema de ecuaciones independientes y simultáneas , x_1 es finita y hay punto de intersección

Cuando $m_1=m_2$, $b_1\neq b_2$, se tiene un sistema de ecuaciones independientes pero no simultáneas , las rectas son paralelas , $x_1=\infty$

Cuando $m_1=m_2$, $b_1=b_2$, se tienen dos ecuaciones simultáneas pero no independientes, las rectas se confunden puesto que pasan por el mismo punto $(0,b)$ y tiene la misma pendiente, en este caso $x=0/0$. Existe indeterminación.

INTERSECCION DE DOS LINEAS CUALQUIERA.

Sea $7y+x=25$, con la curva $x^2+y^2=25$ (circunferencia de radio $=5$ y centro en el origen).

$P(x_1,y_1)$ = el punto de intersección. Sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones por lo tanto:

$$x_1^2+y_1^2=25 \text{ ----------- } (1)$$
$$7y_1+x_1=25 \text{ ----------- } (2)$$

Despejando x en (2) y sustituyendo su valor en (1):

$$49y_1^2-350y_1+625+y_1^2=25$$

$$50y_1^2-350y_1+600=0$$

$$y_1^2-7y_1+12=0 \text{ , cuyas raíces son:}$$

$$y_1'=4 \quad \text{por lo tanto:}$$
$$y_1''=3$$

$$x_1'=25-7y_1'=25-28=3$$

$$x''=25-7y''=25-21=4$$

Las intersecciones son:

$$P(4,3)$$
$$P'(-3,4)$$

Existen tantos puntos de intersección, como pares de valores reales se obtienen para:

$$x_1 \; , \; y_1$$

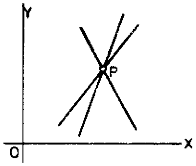
CONDICION PARA QUE TRES RECTAS SEAN CONCURRENTES.

Sean las rectas,

$$y=m_1x+b_1 \; ,$$

$$y=m_2x+b_2 \; ,$$

$$y=m_3x+b_3$$



Siendo $P(x_1, y_1)$, el punto de intersección de la primera con la segunda.

Las coordenadas de la intersección de (1) y (2), son:

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \; ; \quad y_1 = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2}$$

Si la tercera recta pasa pasa por P, las coordenadas de este punto se satisfacen y se tiene:

$$\frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} = m_3 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_3$$

Incorporando b al quebrado, desarrollando y reduciendo, queda:

$m_2 b_3 - m_3 b_2 + m_3 b_1 - m_1 b_3 + m_1 b_2 - m_2 b_1 = 0$, que son los términos del desarrollo del determinante:

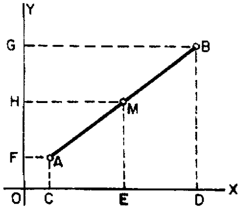
$$\Delta \begin{vmatrix} 1 & m_1 & b_1 \\ 1 & m_2 & b_2 \\ 1 & m_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & b_1 \\ 1 & m_2 & b_2 \\ 1 & m_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_2 & b_2 \\ m_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 & b_3 \\ m_1 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (m_2 b_3 - m_3 b_2) + (m_3 b_1 - m_1 b_3) + (m_1 b_2 - m_2 b_1) \text{, como } \Delta = 0$$

$$0 = m_2 b_3 - m_3 b_2 + m_3 b_1 - m_1 b_3 + m_1 b_2 - m_2 b_1$$

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UNA RECTA $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$



Proyectando los extremos A y B y el punto medio M, sobre cada eje, en el trapecio GFAB, se tiene:

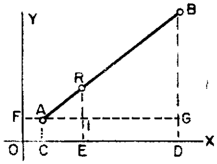
$$HM = \frac{FA + GB}{2} \quad \text{o sea} \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y}$$

en el trapecio ACDB, se tiene:

$$EM = \frac{CA + DB}{2} \quad \text{o sea} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \therefore$$

Las coordenadas del punto medio de un segmento, es la semisuma de las coordenadas del mismo nombre de los extremos

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE UNA RECTA EN UNA RAZON DADA.



Sean:

A(x ,y) , B(x , y), extremos de la recta.

R, punto que la divide en tal forma que:

$$\frac{AR}{AB} = r \text{ (razón dada)}$$

Proyectando A, R y B, sobre OX y trazando por A, la recta FG paralela a OX, se tienen los triángulos semejantes AIR y AGB, de donde:

$$\frac{AI}{AG} = \frac{AR}{AB} = r \quad \text{———————} (1)$$

$$\frac{IR}{GB} = \frac{AR}{AB} = r \quad \text{———————} (2)$$

Siendo:

$AI = FI - FA = x_R - x_1$, $AG = FG - FA = x_2 - x_1$

$IR = ER - EI = y_R - y_1$, $GB = DB - DG = y_2 - y_1$

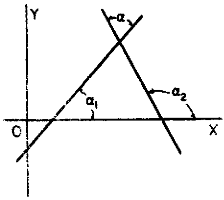
de donde, de (1) y (2), se obtiene:

$$x_R = x_1 + r(x_2 - x_1)$$

$$y_R = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS O MAS RECTAS – ANGULOS –
ANGULOS ENTRE DOS RECTAS.

$y = m_1 x + b_1$, $y = m_2 x + b_2$, dos rectas dadas y α, el ángulo que forman.



$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha$

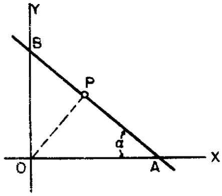
$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, para calcular α, se hace

$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \quad \text{y}$$

sustituyendo $\tan \alpha_1$ por m_1 y $\tan \alpha_2$ por m_2, se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

DISTANCIA DEL ORIGEN A UNA RECTA.



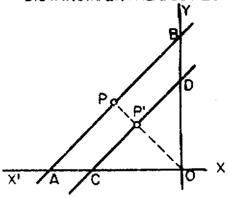
$y = mx + b$; ecuación de la recta AB y OP, la distancia que se desea calcular:

$OP = OB \cos \alpha = b \cos \alpha$, de $\tan \alpha = m$, se hace:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \text{ , por lo tanto:}$$

$$OP = \frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS.



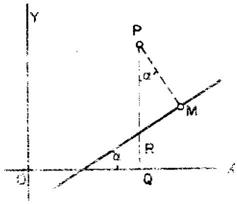
AB, recta con ecuación $y = mx + b_1$
CD, recta paralela a AB con ecuación $y = mx + b_2$
PP', distancia entre AB y CD = OP−OP'

como $OP = \dfrac{b_1}{\sqrt{1+m^2}}$ y $OP' = \dfrac{b_2}{\sqrt{1+m^2}}$

se tiene $P'P = \dfrac{b_1 - b_2}{\sqrt{1+m^2}}$

siendo el signo de b_2, algebraico.

DISTANCIA DE UN PUNTO P, A UNA RECTA.



$y = mx + b$, ecuación de la recta.

$MP = RP \cos \alpha$ ———————— (1)
$RP = QP - QR$ ———————— (2)
$QP = y_1$ ———————— (3)
$QR = y_2 = mx + b$ ———————— (4)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}} \text{ ———————— (5)}$$

sustituyendo (3) y (4) en (2) y después (2) y (5) en (1), se tiene:

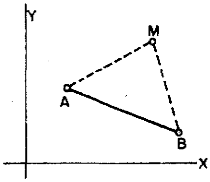
$$MP = \frac{y_1 - (mx_1 + b)}{\pm\sqrt{1+m^2}} \text{ , por lo tanto:}$$

La longitud de la perpendicular trazada de un punto a una recta, es igual al cociente de la ordenada de ese punto menos el segundo miembro de la ecuación de la recta, en el cual se ha sustituido la variable x, por la abscisa del punto entre $\pm$ la raíz cuadrada de uno más el cuadrado de la pendiente de la recta.

LUGARES GEOMETRICOS

MEDIATRIZ y BISECTRIZ

Ecuación del lugar de los puntos equidistantes de $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, dos puntos fijos.



$M(x, y)$, punto móvil cualquiera del lugar geométrico.

Si MA = MB, se tiene:

$$MA = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \text{------} (1)$$

$$MB = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \text{------} (2)$$

Igualando, elevando al cuadrado y reduciendo, se tiene:

$$x_1^2 - 2x_1x + y_1^2 - 2y_1y = x_2^2 - 2x_2x + y_2^2 - 2y_2y$$, que

es una ecuación de primer grado con dos variables y corresponde a una recta. Pasando los términos en y, al primer miembro y los restantes al segundo y poniendo en factor, se tiene:

$$2y(y_2 - y_1) = 2x(x_1 - x_2) + y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2 = 2x(x_1 - x_2) + (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$ y despejando a y:

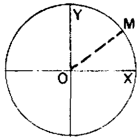
$$y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}x + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ , o sea:}$$

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$, que es la ecuación de la perpendicular BISECTRIZ o MEDIATRIZ, de la recta AB.

La circunferencia.

LA CIRCUNFERENCIA (como lugar geométrico), ES EL LUGAR DE LOS PUNTOS EQUIDISTANTES DE UNO INTERIOR LLAMADO CENTRO.

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA.

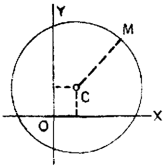


$M(x, y)$, punto móvil cualquiera, de la circunferencia de radio "r".

$OM = r$

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, de donde; $x^2 + y^2 = r^2$

o sea, que la circun-ferencia es referida a su centro (con centro en el origen).



Cuando la circunferencia tiene su centro en cualquier punto.

$C = (3, 4)$, centro de la circunferencia.

$r = 8$ y

$M(x, y)$, punto de la curva.

$CM = 8 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$, de donde:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=64$$

$$x^2-6x+y^2-8y = 39$$

ECUACION GENERAL.

(α, β), coordenadas del centro.
r, radio de la circunferencia.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \text{ ------------------ } (1)$$

por lo tanto:

Para que una ecuación de 2º grado, represente una circunferencia, debe contener el cuadrado de las variables (x, y), con coeficientes iguales y ningún otro término cuadrático.

En (1), si;

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 > 0$, representa una CIRCUNFERENCIA REAL.

si, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = 0$, es una CIRCUNFERENCIA EVANESCENTE y

si, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 < 0$, representa una CIRCUNFERENCIA IMAGINARIA, puesto que; la suma de dos números positivos no puede dar resultado negativo.

CALCULO DEL RADIO Y DE LAS COORDENADAS DEL CENTRO.

Dada la ecuación de una circunferencia, pueden obtenerse las coordenadas del centro. y la longitud del radio.

en, $x^2+y^2-6x+8y=11$, agrupando los términos en x y en y, se tiene:

$(x^2-6x)+(y^2+8y)=11$, agregando el cuadrado de la mitad del coeficiente del primer grado de la variable y añadiendo la suma de dichos cuadrados, se tiene:

$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=11+25=36$, o sea:

$(x-3)^2+(y+4)^2=36$, de donde:

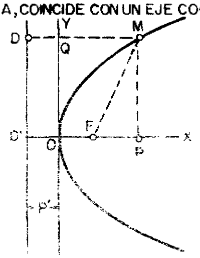
$C(3,-4)$
$r=6$

Si el coeficiente del cuadrado de las variables difiere de 1, se comienza por dividir todos los términos entre dicho coeficiente.

La Parábola.

La PARABOLA (como lugar geométrico), ES EL LUGAR DE LOS PUNTOS EQUIDISTANTES DE UN PUNTO FIJO LLAMADO FOCO Y DE UNA RECTA FIJA, LLAMADA DIRECTRIZ.

ECUACION DE LA PARABOLA REFERIDA A SU VERTICE Y CUYO EJE DE SIMETRIA, COINCIDE CON UN EJE COORDENADO.



Cuando el eje de simetría está en X'X y la curva se extiende indefinidamente en dirección OX.

M(x, y), punto móvil cualquiera de la parábola.

$$MF = MD \text{ ------------------ } (1)$$

$$MF = \sqrt{(x-P')^2+y^2} \text{ ------------- } (2)$$

D(-P', y), puesto que:

DQ = D'O = OF = P', por lo tanto:

$DM = v(x+P')$ ________________ (3)

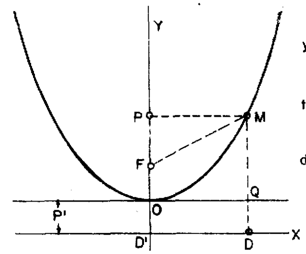
Sustituyendo (2) y (3) en (1), elevando al cuadrado y reduciendo, se obtiene:

$y^2 = 4P'x$, que es la ecuación de la parábola.

Cuando el eje de simetría y el vértice no cambian, pero la parábola se extiende indefinidamente en la dirección OX', la ecuación de la curva es:

$y^2 = -4P'x$

CUANDO EL EJE DE SIMETRIA ESTA EN Y'Y, Y LA CURVA SE EXTIENDE INDEFINIDAMENTE EN DIRECCION OY



M(x, y), punto cualquiera de la parábola y, F(0,P'), su foco.

Siguiendo el procedimiento anterior, se tiene:

$x^2 = 4P'y$ ó $x^2 = -4P'y$, si $F(0,-P)$

de donde:

$y^2 = \pm 4P'x$, $x^2 = \pm 4P'y$

$\overline{PM} = \pm 4P'.QM$, $\overline{QM} = \pm 4P'.PM$

En las variables (en la ecuación), cuando su eje de simetría coincide con uno de los ejes coordenados o es paralelo, sólo figura un término cuadrático, el de las variables x o y.

ANCHO FOCAL o lado recto, es la cuerda trazada por el foco perpendicular al eje de simetría. Si coincide con X'X, el ancho focal es igual al doble de la ordenada con pie en el foco.

CALCULOS DE LOS ELEMENTOS DE LA PARABOLA.

Sea la ecuación $y^2 - 14y - 24x + 25 = 0$, obtener V, F, 4P' y la ecuación de la directriz.

El eje de simetría es paralelo a X'X por figurar y^2

Pasando al segundo miembro los términos independientes de y, se tiene:

$y^2 - 14y = 24x - 25$ a esta ecuación agregando a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente del 1er. grado de y,

$y^2 - 14y + 49 = 24x - 25 + 49$, de donde:

$(y-7)^2 = 24(x+1)$

El Vértice es $V(-1,7)$, $4P' = 24$, $P' = 6$, como $4P' > 0$, la curva se extiende indefinidamente en la dirección OX, por lo tanto:

$-1+6=5$, o sea $F(5,7)$, la ecuación de la directriz es:

$x = -7$, y el ancho focal es $4P' = 4 \times 6 = 24$

La Elipse.

LA ELIPSE (como lugar geométrico), ES EL LUGAR DE LOS PUNTOS TALES, QUE LA SUMA DE LAS DISTANCIAS DE CADA UNO, A DOS PUNTOS FIJOS (llamados FOCOS), ES CONSTANTE.

$\overline{A'A}$ - eje mayor, o focal

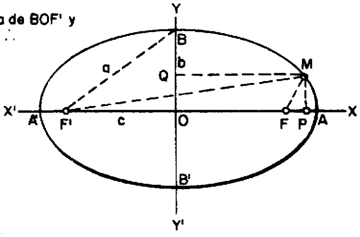
$\overline{BB'}$ - eje menor = 2b

F'F - distancia focal = 2c

$\overline{A'A}$ y $\overline{BB'}$, son los ejes de simetría o diámetros principales.

a = hipotenusa de BOF' y b y c, sus catetos ∴

$a^2 = b^2 + c^2$



A'A - vértices de la elipse
F'M y FM - radios vectores

Cuando los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, si M(x,y), es un punto de la elipse y F'(-c,O), F(c,O), sus focos, se tiene:

$$MF' + MF = 2a \text{ ------------------- } (I)$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

sustituyendo en (I), $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$, despejando un radical, elevando al cuadrado y reduciendo, se tiene:

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$, reduciendo y pasando las constantes al primer miembro, $a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$, $a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2$, sustituyendo a^2-c^2 por b^2, se tiene:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2y^2$, que es la ecuacion de la ELIPSE.

dividiendo ambos miembros entre a^2b^2, resulta la ecuación de la curva en forma simétrica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\overline{QM}^2}{a^2} + \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1$$

En una ELIPSE, solo figuran dos términos cuadráticos (los cuadrados de las variables x e y), con coeficientes desiguales y positivos, cuando los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados.

ANCHO FOCAL, es la cuerda trazada por uno de los focos, perpendicular al eje mayor.

$\frac{2b^2}{a}$, es el ancho focal de la elipse cuyo eje focal coincide con X'X, o es paralelo

EXCENTRICIDAD, es el cociente de la distancia focal entre el eje focal, y se designa por e, de donde:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \qquad \text{ó} \qquad e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$$

La Hipérbola.

La HIPERBOLA (como lugar geométrico), es el lugar de los puntos tales, que la diferencia de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos, es constante.

Si M es un punto móvil de la hipérbola, cualquiera que sea su posición, se tiene:

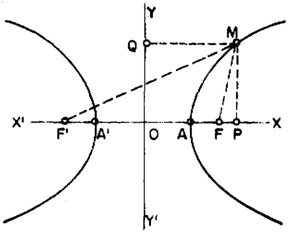
$$MF' - MF = A'A$$

Las rectas A'A y B'B, perpendiculares entre sí, son los ejes de simetría o diámetros-principales

A'A, ejereal o eje focal, se le designa por 2a

BB', eje no focal o conjugado o imaginario, se le designa por 2b

F'F, distancia focal = 2c



A' y A = vértices de la hipérbola

F'M y FM = vectores

Su relación entre los diámetros principales y la distancia focal se expresa:

$c = a + b$, en donde $a > o < b$.

Ecuación de la hipérbola en diferentes posiciones.

Cuando los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, el eje focal está en X'X y es igual a 2a.

Si M(x,y) es un punto móvil de la hipérbola, los focos son, F'(-c,0) y F(c-0), de donde:

$MF' - MF = 2a$

$MF' = 2a + MF$ ____________ (1)

$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, sustituyendo en (1), se tiene

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$cx = a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, expresión que elevada al cuadrado, reducida y pasando las variables al primer miembro, se tiene:

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a(c^2 - a^2)$, sustituyendo $(c^2 - a^2)$ por b, se obtiene la ecuación de la hipérbola.

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, dividiendo ambos miembros entre a^2b^2, se obtiene la ecuación en forma simétrica:

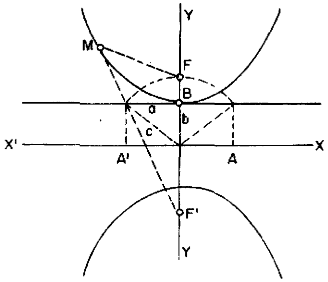
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ó \quad \frac{\overline{QM}^2}{a^2} - \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1$$

Cuando los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, el eje focal está en YY' y es igual a 2b.

Siendo M, un punto de la hipérbola y F'(0,-c) y F(0,c), los focos, se tiene:

$MF' - MF = 2b$

$MF' = 2b + MF$ ________________ (1)



$MF' = \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$, $MF = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$, sustituyendo en (1), se tiene:

$\sqrt{x^2+(y+c)^2} = 2b + \sqrt{x^2+(y-c)^2}$, elevando al cuadrado y reduciendo, se tiene:

$$4cy - 4b^2 = 4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$

$cy - b^2 = b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$, elevando al cuadrado y reduciendo, se tiene:

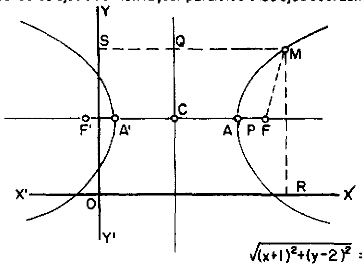
$(c^2-b^2)y^2 - b^2x^2 = b^2(c^2-b^2)$, sustituyendo (c^2-b^2) por a^2, se tiene:

$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$ ________ (2) , dividiendo ambos miembros entre a^2b^2

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ____________ (3) , multiplicando en (2) y (3) por -1, se tiene:

$b^2x^2 - a^2y^2 = -a\ b$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Cuando los ejes de simetría, son paralelos a los ejes coordenados.



M(x,y)
C(3,2)
F'(-1,2)
F(7,2)
$2a = 4$
$MF' - MF = 4$
$MF' = 4 + MF$ _____ (1)
$MF' = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$
$MF = \sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$
sustituyendo en (1)

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 4 + \sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$$

de donde:

$$16x - 64 = 8\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$$

$2x - 8 = \sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$, elevando al cuadrado y reduciendo:

$$3x^2 - 18x - (y-2)^2 = -15$$

$$3(x^2-6x) - (y-2)^2 = -15$$

agregando 9 al Binomio $x^2 - 6x$, para convertirlo en Trinomio cuadrado perfecto, equivale a sumar $3 \times 9 = 27$, al primer miembro y añadiendo también 27 al segundo miembro se tiene:

$3(x-3)^2 - (y-2)^2 = -15 + 27 = 12$, o dividiendo entre 12

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

DOS HIPERBOLAS SON CONJUGADAS, CUANDO EL EJE FOCAL O REAL DE LA PRIMERA, ES EL EJE NO FOCAL DE LA SEGUNDA, O VICEVERSA.

Si los diámetros principales de una hipérbola son iguales, $b = a$, la curva es una hipérbola equilátera y su ecuación es:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

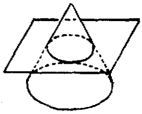
La ecuación de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo a X'X, es de la forma;

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad ó \quad \frac{(x-\alpha)}{a} - \frac{(y-\beta)}{b} = -1$$

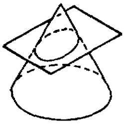
que es la ecuación de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo a YY' y su centro está en:
$C(\alpha, \beta)$

Cónicas

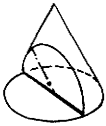
Son curvas de 2° grado (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) consideradas como intersecciones de la superficie de un CONO de revolución con un plano secante.



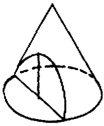
Es una CIRCUNFERENCIA, cuando el plano corta a todas las generatrices y es paralelo a la base del cono.



Es una ELIPSE, cuando el plano corta todas las generatrices y no es paralelo a la base.



Es una PARABOLA, cuando el plano es paralelo a una generatriz.



Es una HIPERBOLA, cuando el plano es perpendicular a la base.

NATURALEZA DE LAS CONICAS.
La ecuación general de las CONICAS, es:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en donde A, B, C, D, E y F, son constantes.

Cuando:
- $A = C$, la ecuación representa una CIRCUNFERENCIA.
- $A = 0$ ó $C = 1$, la ecuación representa una PARABOLA.
- A y C, tienen el mismo signo, la ecuación representa una ELIPSE.
- A y C, son de signo contrario, la ecuación representa una HIPERBOLA.

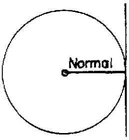
RESUMEN:

Si D= discriminante B^2-4AC y N= número del término único en el radicando, se tiene:

$D<0$	ELIPSE	trinomio con raíces reales	Elipse real
		" " raíz doble	" evanescente
		" " raíces complejas	" imaginaria
$D=0$	PARABOLA	binomio o monomio con un término en x	Parábola real
		sin término en x	" que ha degenerado en:
		si $N>0$	2 rectas paralelas
		si $N=0$	2 rectas coincidentes
		si $N<0$	Parábola imaginaria
$D>0$	HIPERBOLA	trinomio con raíces reales	Hipérbola que corta al diámetro
		" " raíz doble	" " ha degenerado en dos rectas que se cortan
		" " raíces complejas	Hipérbola que no corta al diámetro

ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA REFERIDA A SU CENTRO

Se llama NORMAL, a la perpendicular a la tangente, a una curva, en el punto de tangencia.



$x_1 y = y_1 x$, es la ecuación de la normal a la circunferencia, o sea un radio de ella.

Ecuación de la tangente y normal de la Parábola.

Tangente, $y y_1 = 2p(x+x_1)$

Normal, $y-y_1 = -\frac{y_1}{2p}(x-x_1)$

Ecuación de la tangente y normal de la Elipse.

Tangente, $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

Normal, $y-y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x-x_1)$

Ecuación de la tangente y normal de la Hipérbola.

Tangente, $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

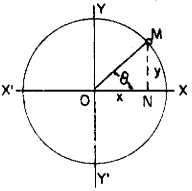
Normal, $y-y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x-x_1)$

Ecuaciones Paramétricas.

En el trazo de una curva por puntos partiendo de su ecuación, en coordenadas carte_ sianos, se comienza por expresar una de las variables en función de la otra.

Algunas veces conviene expresar las coordenadas de los puntos de una curva en función de una tercera variable llamada PARAMETRO y las ecuaciones que conectan las coordenadas con el parámetro, se llaman ECUACIONES PARAMETRICAS.

Ecuaciones PARAMETRICAS de la circunferencia.



Sea la circunferencia con centro en O y radio r.

M(x, y), un punto de la curva.

θ, ángulo XOM.

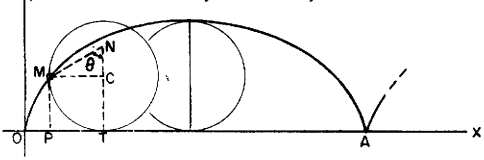
Son ecuaciones paramétricas;

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

Ecuaciones PARAMETRICAS de la cicloide

Cicloide es una curva descrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar a lo largo de una recta fija



OX, eje de las X sobre el cual rueda el circulo generador, con centro C y radio r.

M, punto fijo que describe la curva.

T, punto de contacto de la circunferencia con OX.

$\overline{OT} = \widehat{TM}$

$OA = 2\pi r$.

Cuando la medida del arco se da en radianes, el arco es igual al radio multiplicado por el número que mide el ángulo, por lo tanto:

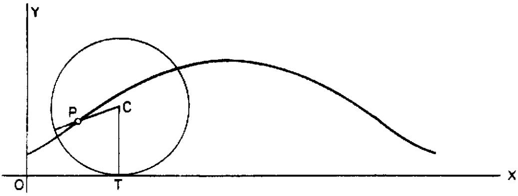
$x = OP = OT - MN = r\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$y = PM = TC - NC = r - r\cos\theta$, de donde:

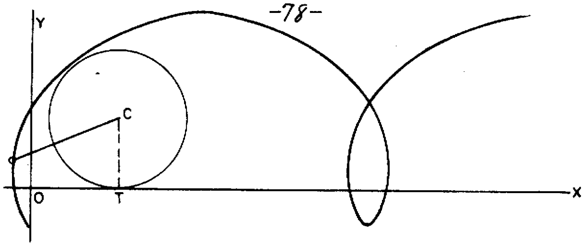
$x = r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$ ---------- (1)

$y = r(1 - \cos\theta)$ ---------- (2), que son las ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA CICLOIDE.

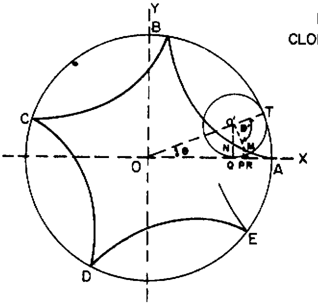
Cuando el punto fijo que produce la cicloide, se encuentra dentro del círculo generador resulta una CICLOIDE ALARGADA



y si está en el exterior se produce una CICLOIDE REDUCIDA o ACORTADA



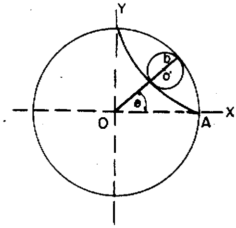
Estas dos curvas se llaman TROCOIDES.



Ecuaciones paramétricas de la HIPOCI_
CLOIDE.

$$x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta$$

$$y=(a-b)\operatorname{sen}\theta-b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta$$

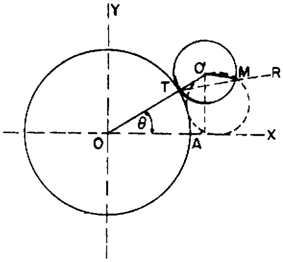


ASTROIDE. Ecuaciones paramétricas

Cuando $O'b=1/4\ OA$

$$x=a\cos^3\theta$$

$$y=a\operatorname{sen}^3\theta$$



EPICICLOIDE. Ecuaciones paramétricas

$$x=(a-b)\cos\theta-b\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

$$y=(a+b)\operatorname{sen}\theta-b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta$$

Ecuaciones simultáneas de segundo grado.

En;

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

$a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0$, que es la forma general de un sistema de ecuaciones de 2º grado con dos incógnitas, se tiene; eliminando a "y", una ecuación de cuarto grado en x, que generalmente no puede resolverse por métodos elementales. Por ejemplo:

$x^2+y=7$ ____________(1)
$x+y^2=11$ ____________(2)
de (1), se deduce $y=7-x^2$ ____________(3)

Sustituyendo (3) en (2) y desarrollando, se tiene:

$x^4-14x^2+x+38=0$; ecuación sin solución por métodos elementales y que sólo por tanteos se descubre que 2 es una de sus raíces.

ECUACIONES SIMULTANEAS DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO.

$2x^2+y^2=33$ __________(1)
$2x+y=9$ __________(2)
la ecuación (2), da; $y=9-2x$ _______(3)

Sustituyendo (3) en (1)

$x^2-6x+8=0$ $\therefore$

$x=2$ ó 4

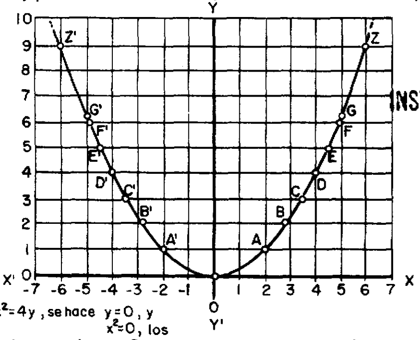
Sustituyendo estos valores en (3):

$y=5$ ó 1 , de donde:

cuando $x=2$, $y=5$
$x=4$, $y=1$

REPRESENTACION GRAFICA DE ECUACIONES DE 2º GRADO.

Sea $x^2=4y$, ecuación de la PARABOLA.



Si en $x^2=4y$, se hace $y=0$, y $x^2=0$, los valores de x, se reducen a 0, o sea que la curva pasa por el origen.

Al hacer la tabulación, debe tenerse en cuenta que; para valores negativos de y, los de x son imaginarios por lo cual, para y, sólo se usan valores positivos.

y =	0	1	2	3	4	5	6	6.25	----	9
x =	0	± 2.0	±2.8	±3.5	± 4	±4.46	± 4.9	± 5.0	-----	± 6.0
Puntos	O	A,A'	B,B'	C,C'	D,D'	E,E'	F, F'	G,G'		Z, Z'

Cuando $y=1$, $x^2=4$, de donde:

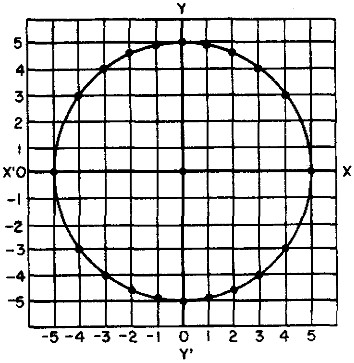
$x=\sqrt{4}=\pm 2$, quedando $+2$ a la derecha del origen y -2 a la izquierda observándose que para cada valor de y, corresponden dos de x, iguales numéricamente pero de signo contrario.

Toda ecuación de la forma $x^2+y^2=r^2$, corresponde a una circunferencia de radio r, siendo su forma general, $x^2+y^2+ax+by+c=0$, en donde a, b y c, son constantes.

En $x^2+y^2=25$, se puede hacer:

$y^2=25-x^2$, si $x>5$ ó <-5, y, es imaginaria, de donde haciendo $x=\pm 5$, $y=0$, por lo tanto

x =	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y =	±3	±4	±4.6	±4.9	±5	±4.9	±4.6	±4	±3



Las ecuaciones de la forma $ax^2+by^2=c$, en donde a y b tienen un mismo signo, representan una ELIPSE.

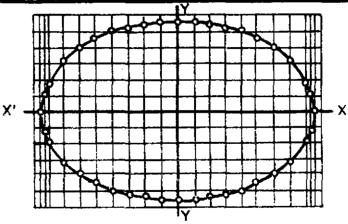
Si $4x^2+9y^2=288$

$$y^2=32-\frac{4}{9}x^2$$

Cuando $\frac{2}{3}x>\sqrt{32}$ ó $<-\sqrt{32}$, "y" es imaginaria, por lo tanto, x debe estar comprendida entre $3/2\ \sqrt{32}$ ó $3/2\ -\sqrt{32}$ ó aproximadamente entre 8.5 y −8.5

Para $x=8.5$, $y=0$ y para $x=0$, $y=5.6$, de donde:

x =	±8.3	±8.0	±7.0	±6.0	±5.0	±4.0	±3.0	±2.0	±1.0
y =	±1.2	±1.9	±3.2	±4.0	±4.6	±5.0	±5.3	±5.5	±5.6

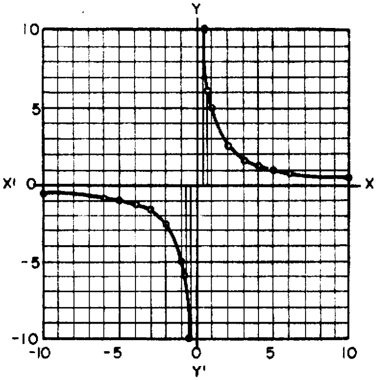


Hipérbola:

Sea $xy = a$ ó $y = \frac{a}{x}$, si $a=5$, se tiene; $y = \frac{5}{x}$, de donde:

x=	0.5	0.83	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	—	10.0
y=	10.0	6.0	5.0	2.5	1.66	1.25	1.0	0.83	—	0.5

x=	-0.5	-0.83	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0	-5.0	-6.0	—	-10.0
y=	-10.0	-6.0	-5.0	-2.5	-1.66	-1.25	-1.0	-0.83	—	-0.5



En un sistema, cuando una de las ecuaciones, es HOMOGENEA.

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0 \text{ ---------- } (1)$$

$$x^2 + 4x + 3y = 69 \text{ ---------- } (2)$$

de(1) se hace $x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 24y^2}}{2} = \frac{-y \pm 5y}{2} = 2y$ ó $-3y$

sustituyendo en(2) a x por 2y, se tiene:

$$4y^2 + 11y = 69$$

de donde:

$$y = 3 \text{ o } -\frac{23}{4} \quad \therefore$$

$$x = 2y = -\frac{23}{2}$$

sustituyendo en(2) a x por −3y, se tiene:

$$y^2 - y = \frac{23}{3}, \text{ de donde:}$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{2}, \text{ por lo tanto:}$$

para $x = 6,\ \frac{-3-\sqrt{285}}{2},\ -\frac{23}{2},\ \frac{-3+\sqrt{285}}{2}$

$y = 3,\ \frac{3+\sqrt{285}}{6},\ -\frac{23}{4},\ \frac{3-\sqrt{285}}{6}$

Construyendo las dos ecuaciones se encuentra que la (1) representa dos rectas que se cortan y la (2), una parábola.

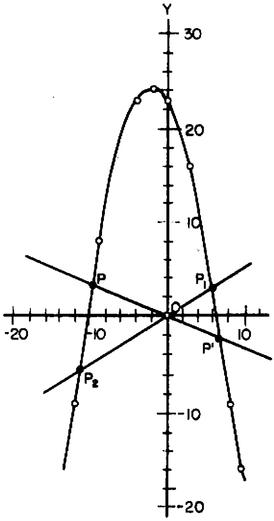
La ecuación (1), puede escribirse:

$(x-2y)(x+3y)=0$, en donde los factores representan las dos rectas

$$x-2y=0 \quad y \quad x+3y=0$$

y para la (2), se tiene:

x=	-12	-9	-4	-2	0	3	6	8	9
y=	-9	8	23	24.3	23	16	3	-9	-16



Haciendo simultáneas la ecuación de la parábola con cada una de las rectas, se obtienen los puntos de intersección de ellas con la parábola, siendo para:

$P(-9.9, 3.3)$ y $P'(6.9, -2.3)$

y $P_2(-11.5, -5.75)$ y $P_1(6, 3)$

FORMAS ESPECIALES.

Cuando presentan la siguiente forma:

$$x^3+y^3=9 \quad \text{--------} (1)$$
$$x+y=3 \quad \text{--------} (2)$$

dividiendo (1) entre (2), se tiene:

$$x^2-xy+y^2=3 \quad \text{------} (3)$$

de (2), se hace $y=3-x$, sustituyendo y, por este valor en (3), se tiene:

$x^2-x(3-x)+(3-x)^2=3$ y quitando paréntesis,

$x^2-3x+x^2+9+x^2-6x=3$, de donde reduciendo, queda:

$3x^2-9x+6=0$, de donde, dividiendo por 3, queda:

$x^2-3x+2=0$ o factorizando $(x-2)(x-1)=0$ $\therefore$

$x = 2 \text{ ó } 1$
$y = 1 \text{ ó } 2$

Para resolver el sistema;

$$x^2 + y^2 + x + y = 18 \quad \text{------} (1)$$
$$xy = 6 \quad \text{------} (2)$$

de (2), se hace $2xy = 12$
agregando (1), $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 30$, de donde $(x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0$
despejando $x + y$

$$x + y = -6$$
$$y = -6 - x$$
$$x + y = 5$$
$$y = 5 - x$$

Sustituyendo los valores de y, en (2)

$x^2 + 6x + 6 = 0$, de donde; $x = -3 + \sqrt{3}$
$x = -3 - \sqrt{3}$ y

$x^2 - 5x + 6 = 0$, de donde; $x = 2 \text{ ó } 3$
$y = 3 \text{ ó } 2$

Se verifica sustituyendo en (1)

Resolver el sistema;

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \quad \text{--} (1)$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \quad \text{--} (2)$$

de (1) se saca $\frac{1}{y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x}$

sustituyendo en (2)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{9}{4} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{4}$$

de donde; $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 1 = 0$

$$x = 2 \text{ ó } 1$$

de (1), se deduce, para $x = 2, 1$

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = 1$$

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = 2$$

por lo tanto; cuando $x = 2$, $y = 1$ y cuando $x = 1$, $y = 2$

Incremento y Diferencial.

LA DIFERENCIA $b - a = h = \Delta x$, es el incremento de la variable independiente x, que pasa de un valor inicial a, a uno final b.

VALOR INICIAL de una función $f(x)$, es el que adquiere esa función cuando a la variable independiente x, se le asigna un valor inicial a o sea, valor inicial $f(x)$, es $f(a)$.

El VALOR FINAL, lo adquiere la función, cuando a la variable x, se le asigna su valor final b, o sea;

VALOR FINAL de $f(b)$ ó $f(a+h)$, cuando $b=a+h$.

INCREMENTO, en el intervalo (a,b), es la DIFERENCIA ENTRE EL VALOR FINAL Y EL INICIAL.

$$f(b)-f(a) \quad ó \quad f(a+b)-f(a)$$

La letra griega Δ, indica el incremento de una función y se usa anteponiéndola a ella, o en lugar de ésta letra, colocando a la función entre paréntesis rectangulares

$$\Delta_a^b x = [x]_a^b = b-a$$

$$\Delta_5^7 x^2 = [x^2]_5^7 = 7^2-5^2 = 24$$

$$\Delta_a^{a+h} x^2 = [x^2]_a^{a+h} = a^2+2ah+h^2-a^2 = 2ah+h^2$$

En cada uno de los casos anteriores, el incremento depende del valor inicial $\underline{a}$ de la variable independiente y del incremento $\underline{h}$ de esa variable.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION $f(x)$, en el intervalo (a,b), es el producto de la derivada de dicha función, para el valor $\underline{a}$, de la variable independiente por el incremento de esa variable. Su valor es, como el del incremento, función de $\underline{a}$ y de $\underline{b}$.

La diferencial de $f(x)$ en el intervalo $(a,b)=h$, se simboliza en la siguiente forma.

$$d_a^{a+h} f(x) = f'(a)\,h.$$

PROPIEDAD IMPORTANTE.

La diferencial de la variable independiente $\underline{x}$ es <u>exactamente</u> <u>igual</u> al incremento de dicha variable, o sea:

$$dx = \Delta x = h$$

En la función lineal $y=x$, como sus diferenciales son también iguales, se tiene:

$$dy=dx \text{ ---------- } (1)$$

por definición de diferencial:

$$dy=f(x)\,\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x = h \text{ ------- } (2)$$

igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\Delta x = h = dx, \text{ de donde:}$$

LA DIFERENCIA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE (dx), es igual a su incremento $(\Delta x$ ó $h)$ ó

sea $y=f(x)$

$dy=f'(x)\Delta x$, sustituyendo Δx por dx, resulta:

$$dy=f(x)dx \text{ ---------- } (3) \quad \therefore$$

LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCION, es igual AL PRODUCTO DE LA DERIVADA DE LA FUNCION, POR LA FUNCION DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Dividiendo ambos miembros de (3) entre dx, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \therefore$$

LA DERIVADA DE UNA FUNCION, es igual AL COCIENTE DE LA DIFERENCIAL DE LA FUNCION entre LA FUNCION DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.

INTERPRETACION DE LA DIFERENCIAL.

Obtener el área de un círculo de radio "r"

$A=\pi r$, $dA=2\pi r\, dr$, o sea que; la diferencial es un volumen que puede - considerarse al de un cilindro de base igual al área de la esfera y altura igual a dr.

Si dr es muy pequeña, dV, es el volumen de una cáscara esférica.

Obtener el volumen de un cubo de arista $\underline{a}$.

$V = a^3$, $dV = 3a^2 da$, o sea que;

La DIFERENCIAL, es la suma de los volúmenes de tres paralelepípedos que tienen por base, una de las caras del cubo y por altura da.

Si da, es muy pequeña, dV, es aproximadamente igual a la de una capa de espesor a do igual a da, superpuesta a uno de los triedros

DIFERENCIALES DE LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS

a)_ $d(u+v+z) = du+dv+dz$

b)_ la dif. de x^m

$$dx^m = D_x x^m dx = m x^{m-1} dx$$

c)_ la dif. de u^m

$$du^m = D_x u^m dx = m u^{m-1} D_x u dx = m u^{m-1} dx$$

d)_ la dif. de un producto.

$$d(uv) = D_x(uv)dx = (u D_x v + v D_x u) dx = u dv + v du$$

e)_ la dif. de un cociente.

$$d\frac{u}{v} = D_x \frac{u}{v} dx = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2} dx = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

f)_ la dif. de un radical de 2o. grado.

$$d\sqrt{u} = D_x \sqrt{u}\, dx = \frac{D_x u\, dx}{2\sqrt{u}} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

FUNCIONES SIMPLES TRASCENDENTES

g)_ la dif. de una función exponencial.

$$da^u = D_x a^u dx = a^u La\, D_x u dx = a^u La\, du$$

$$de^u = D_x e^u dx = e^u D_x u\, dx = e^u du$$

h)_ la dif. de una función logarítmica.

$$dLu = D_x Lu\, dx = \frac{D_x u}{u} dx = \frac{du}{u}.$$

FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS E INVERSAS

i)_ $d\,\mathrm{sen}\, u = D_x \mathrm{sen}\, u\, dx = \cos u\, D_x u dx = \cos u\, dx$

j)_ $d\cos u = D_x \cos u\, dx = -\mathrm{sen}\, u\, D_x u\, dx = -\mathrm{sen}\, u\, du$

k)_ $d\,\mathrm{tang}\, u = D_x \mathrm{tang}\, u\, dx = \sec^2 D_x u\, dx = \sec^2 u\, du$

l)_ $d\sec u = D_x \sec u\, dx = \sec u\, \mathrm{tang}\, u\, D_x u\, dx = \sec u\, \mathrm{tang}\, u\, du$

m)_ $d\,\text{áng sen}\, u = D_x \text{áng sen}\, u dx = \dfrac{D_x u\, dx}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-u^2}} = d\,\text{áng cos}\, u$

n)_ $d\,\text{áng tang}\, u = D_x \text{áng tang}\, u\, dx = \dfrac{D_x u\, dx}{1+u^2} = \dfrac{du}{1+u^2} = -d\,\text{áng cot}\, u$

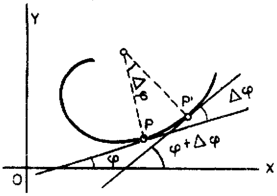
o)_ $d\,\text{áng sen}\, u = D\ \text{ang sec}\, u\, dx = \dfrac{D\ \ u\, dx}{u\sqrt{u^2-1}} = \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = -d\,\text{áng csc}\, u$

Curvatura.

La dirección de una curva plana en uno de sus puntos, es la de la tangente a la curva en ese punto.

Cuando el punto de tangencia se desplazó sobre la curva, cambia la dirección de la tangente y la forma de la curva está, íntimamente relacionada con la rapidez con que varía la pendiente de la tangente.

La comparación del cambio de dirección con el trayecto recorrido por el punto de tangencia da la idea de CURVATURA.



Si φ, es el ángulo que la tangente en P, forma con X'X y $\varphi+\Delta\varphi$, es el que forma con el mismo eje, la tangente en P' (punto próximo a P) la tangente en P ha tenido un cambio en su dirección igual a $\Delta\varphi$ y la curvatura del arco PP', depende de la magnitud de $\Delta\varphi$

Si Δs, es igual a la longitud del arco PP', a la razón $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, se le llama CURVATURA MEDIA y simplemente CURVATURA al:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds} \text{ ---------- } (1)$$

que depende en general, de la posición del punto en la curva, por eso, es necesario expresar su valor en función de x e y.

El valor (1), puede escribirse:

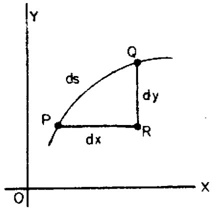
$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi/dx}{ds/dx} \text{ ---------- } (2)$$, lo que implica el cálculo de $\frac{d\varphi}{dx}$ y de $\frac{ds}{dx}$

Por la propiedad fundamental de la derivada, se tiene:

long. $\varphi = y'$; de donde:

$\varphi =$ áng tang y'

$$y=\frac{d\varphi}{dx}=D \text{ áng tang } y'=\frac{1+y^{2}}{y''} \text{ ---------- } (3)$$



Considerando como rectilíneo, el triángulo rectángulo PQR, se tiene:

$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, dividiendo ambos miembros entre dx:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y^2} \text{ -------- } (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2):

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{y''}{(1+y'^2)} \text{ ----- } (5)$$, que es la curvatura correspondiente al punto P.

RADIO DE CURVATURA. _CIRCULO DE CURVATURA.

Considerando a Q, suficientemente próximo a P, el arco PQ se considera como perteneciente a una circunferencia de radio RP=r y como el radio multiplicado por el ángulo (expresado en radianes) es igual al arco, se tiene:

$r\Delta\varphi = \Delta s$, de donde:

$$r=\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$, o sea;

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{r}$$

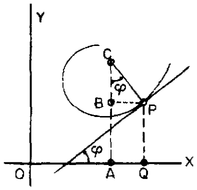
haciendo que $\Delta s \to 0$, variará r

Siendo V el valor límite de r, se tiene:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{V}$$, de donde:

$$V = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$ = RADIO DE CURVATURA, de la curva en P y el círculo de radio V, es el CIRCULO DE CURVATURA. ______(6)

COORDENADAS DEL CENTRO DEL CIRCULO DE CURVATURA.



Pueden calcularse las coordenadas (α, β) del centro C, del círculo de curvatura correspondientes a un punto $P(x_1, y_1)$, de una curva dada por su ecuación, $y = y(x)$.

$\alpha = OA = OQ - BP = x_1 - R\,\text{sen}\,\varphi$ _______ (1)

$\beta = AC = AB + BC = y_1 + R\cos\varphi$ _______ (2)

pero:

$R = \frac{(1+y_1'^2)3/4}{y''}$; $\tan\varphi = y'$; $\cos\varphi = \frac{1}{(1+y'^2)1/2}$;

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{y'}{(1+y'^2)1/2}$$

sustituyendo en (1) y (2):

$$\alpha = x_1 - \frac{y'(1+y'^2)3/2}{y''(1+y'^2)1/2} = x_1 - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$\beta = y_1 + \frac{(1+y'^2)3/2}{y''(1+y'^2)1/2} = y_1 + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Cálculo Integral.

Puede considerarse el CALCULO INTEGRAL, como el inverso del CALCULO DIFERENCIAL puesto que, su objeto fundamental es el de ENCONTRAR EL LIMITE DE LA SUMA DE UN NUMERO INFINITAMENTE GRANDE, DE MAGNITUDES INFINITAMENTE PEQUEÑAS.

$\int$, se usa como signo para indicar esta operación.

ANTIDIFERENCIAL del producto de una función de cierta variable independiente por la diferencial de ésta, es también una función de la misma variable, cuya diferencial es ese producto.

$2x\,dx$, es la diferencial de x^2

x^2, es la antidiferencial de $2x\,dx$

La antidiferencial se denomina también FUNCION PRIMITIVA

La antidiferencial de una función dada, se indica anteponiendo el signo $\int$ a esa función:

$$\int 2x\,dx$$

A una diferencial dada le corresponde un número indefinido de antidiferenciales, las cuales sólo difieren en una constante, llamada constante de integración

DETERMINACION DE LA CONSTANTE.

x^2+c, representa una familia de parábolas en donde para cada valor de c, corresponde una de esas curvas

Si una de las parábolas dada por $y=x^2+c$, pasa por P(2,1), se tiene:

$$1=2^2+c \text{, de donde:}$$
$$c=-3$$

si pasa por Q(3,11), se tiene:

$$11=3^2+c \text{, de donde:}$$
$$c=2 \text{, etc.}$$

LA INTEGRAL DEL PRODUCTO DE UNA FUNCION DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE POR LA DIFERENCIAL DE ESTA, ES UNA FUNCION DE LA MISMA VARIABLE CUYA DIFERENCIAL ES ESE PRODUCTO

Siendo la diferenciación y la integración, operaciones inversas, LA DIFERENCIAL DE UNA INTEGRAL, ES IGUAL AL INTEGRANDO.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

diferenciando en ambos miembros, se tiene:

$$d\int f(x)\,dx = d\left[F(x)+c\right] = f(x)\,dx$$

, o sea que si los operadores d y $\int$, deben aplicarse sucesivamente a cierta diferencial, pueden dejarse de escribir, puesto que el resultado es esa diferencial, puesto que: si c es una constante arbitraria, se tiene:

$$\int c\,du = c\int du \text{ ------ } (1)$$

diferenciando en el segundo miembro de (1):

$$d\left[c\int du\right] = c\left[d\int du\right] = c\,du$$

y diferenciando en el primer miembro de (1):

$$d\int c\,du = c\,du$$

, como las diferenciales de los dos miembros de (1), son iguales, se tiene:

$$\int c\,du = c\int du$$

GENERALIZANDO:

$$\int (m+1)x^m\,dx = \frac{(m+1)x^{m+1}\,dx}{(m+1)\,dx} = x^{m+1}+c$$

, sea m fraccionario o entero, positivo o negativo

Cuando $m=-1$, se exceptúa puesto que aplicandola regla a la diferencial $x^{-1}\,dx$, se tendrá:

$$\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \infty$$

, lo cual es inexacto. En efecto se tiene:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = Lx+c$$

, PUESTO QUE EL NUMERADOR ES LA DIFERENCIAL DEL DENOMINADOR.

El INTEGRANDO, es la diferencial de una potencia de exponente constante de función de x.

Si $y=u^n$, en que u F(x), se tiene: $dy=nu^{n-1}dx$

Multiplicando por la función u y dividiendose entre el nuevo exponente y entre du, se tiene:

$$y=\int nu^{n-1}du=\frac{nu^n\ du}{n\ du}=u^n+c$$

LA INTEGRAL DE UNA SUMA ALGEBRAICA DE DIFERENCIALES, es igual A LA SUMA ALGEBRAICA DE LAS INTEGRALES DE LAS DIFERENCIALES.

Siendo:

$$\int(du+dv+dz)\text{, en donde } u=f_1(x)\ ,\ v=f_2(x)\ \ y\ \ z=f_3(x)$$

diferenciando la suma $u+v+z$, se tiene:

$$d(u+v+z)=du+dv+dz\ \therefore\ \int d(u+v+z)=\int(du+dv+dz)$$

pero:

$u=\int du\ ,\ v=\int dv\ \ y\ \ z=\int dz$, sustituyendo en la igualdad anterior, se tiene:

$$\int(du+dv+dz)=\int du+\int dv+\int dz$$

LA INTEGRAL DEFINIDA COMO LIMITE DE SUMA.

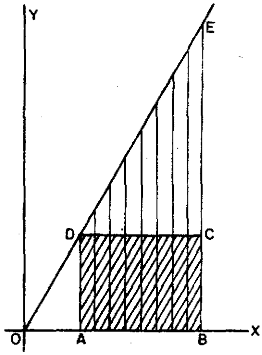
EJEMPLO NUMERICO:

x^2, función no lineal cualquiera y su incremento en el intervalo $(1,3)$, es:

$\Delta_1^3\ x^2=9-1=8$, la diferencial de ésta función y en el mismo intervalo, es:

$$d_1^3\ x^2=2x.2=4x_{x=1}=4$$

Representando la función derivada de x^2, o sea $f(x)=2x$, y su diferencial representada por el triángulo DCE, es $8-4=4$.



Si en lugar de tomar la diferencial de un solo intervalo, se divide éste en varias partes y se toma la diferencial de la función para cada intervalo, se suman los valores obtenidos para cada intervalo y luego, se suman los valores parciales de las diferenciales de los intervalos parciales, SE OBTIENE UN VALOR TANTO MAS PROXIMO DEL INCREMENTO, CUANTO MAYOR SEA EL NUMERO DE INTERVALOS

Dividiendo el intervalo $(3-1=2)$, en ocho partes iguales, .25 es la amplitud de cada intervalo y el área de cada uno de los ocho rectángulos, de izquierda a derecha, es sucesivamente:

$$d_{1.}^{1.25}\ x^2=2x\ .\ .25_{x=1}=.5$$

$$d_{1.25}^{1.5}\ x^2=2x.\ .25_{x=1.25}=.625$$

$$d_{1.50}^{1.75}\ x^2=2x.\ .25_{x=1.50}=.75$$

$$d_{1.75}^{2.}\ x^2=2x.\ .25_{x=1.75}=.875$$

$$d_{2.}^{2.25}\ x^2=2x.\ .25_{x=2.}=1.00$$

$$d_{2.25}^{2.5}\ x^2=2x.\ .25_{x=2.25}=1.125$$

$$d_{2.5}^{2.75}\ x^2=2x.\ .25_{x=2.50}=1.25$$

$$d_{2.75}^{3}\ x^2=2x.\ .25_{x=2.75}=1.375$$

de donde:

$$\int_{x=3}^{x=1} 2x\,\Delta x = 7.50$$, la diferencia ente el incremento y la suma de las diferenciales, es; $8.00-7.50=.50$

Los valores obtenidos para las diferenciales anteriores, forman una progresión aritmé_ tica, cuyo ler. término es $\underline{.5}$, la razón $\underline{.625-.5=.125}$, 8 el número de términos y el 8° — término $=.5+.125 \cdot 7=1.375$, designando por S la suma de las diferenciales, se tiene:

$$S=\frac{.5+1.375}{2}\,8=7.50$$, que es el valor anteriormente obtenido.

Si AB, es dividida en 16 partes iguales, se tiene:

a = el primer término de la progresión
r = la razón y
u = el último término:

$$a=d_{1.00}^{1.25}\,x^2=2x..125=.25x\Big|_{x=1}=.25$$

$$r=d_{1.125}^{1.25}\,x^2-d_{1.00}^{1.125}\,x^2=.28125-.25=.03125\,;$$

$$u=a+15r=.25+.46875=.71875$$, de donde:

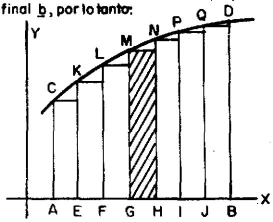
$$S=\frac{.25+.71875}{2}\,16=7.75$$

La diferencia entre el incremento y la suma de las diferenciales, es:

$$8-7.75=.25$$, de donde:

SI EL NUMERO DE INTERVALOS PARCIALES CRECE INDEFINIDAMENTE, SE TEN_ DRA; QUE EN EL LIMITE, LA SUMA DE LAS DIFERENCIALES CORRESPONDIENTES A LOS DIVERSOS INTERVALOS, ES EXACTAMENTE IGUAL AL INCREMENTO DE LA FUN_ CION.

La integral definida de una diferencial dada, calculada entre dos extremos (llamados ex_ tremos inferior y superior, que se suponen constantes), es el incremento de la función primitiva o antidiferencial de la diferencial propuesta cuando la variable pasa de un valor inicial $\underline{a}$, a uno final $\underline{b}$, por lo tanto:



Cada uno de los productos de la forma $f(x)\,dx$; es el área de un rectángulo análogo al GHMN, por lo tanto; la fórmula obtenida, o sea, la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$, REPRESENTA EL AREA DE LA SUPERFICIE LIMITADA — POR SU ECUACION_ ARCO CUYOS EXTRE MOS TIENEN COMO ABSCISAS $\underline{a}$ y $\underline{b}$, LAS ORDENADAS EXTREMAS Y LA PARTE — DEL EJE DE LAS Xs, COMPRENDIDA EN TRE LOS PIES DE DICHAS ORDENADAS.

INTEGRAL INDEFINIDA.

Cuando no hay extremos o límites que definan la integral, es INTEGRAL INDEFINIDA.

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$, o sea:

La integral indefinida es la antidiferencial, de donde;
LA INTEGRACION, ES OPERACION INVERSA DE LA DIFERENCIACION.

Procedimientos de integración.

INTEGRACION INMEDIATA Y POR MULTIPLICACION DE UN FACTOR.

Integrales inmediatas, son aquellas, en donde para efectuar la integración no hay que hacer cambio alguno en el integrando, en ellas, la antidiferencial es la función cuya diferencial se obtuvo en la mayoría al buscar una fórmula aplicable a la diferenciación de las funciones análogas a dicha función.

1.- $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$

2.- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3.- $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c$

4.- $\int a^u La\, du = a^u + c$

5.- $\int e^u du = e^u + c$

6.- $\int \frac{du}{u} = Lu + c$

7.- $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + c$

8.- $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + c$

9.- $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tang} u + c$

10.- $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$

11.- $\int \sec u \operatorname{tang} u\, du = \sec u + c$

12.- $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + c$

13.- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{áng sen} \frac{u}{a} + c$

14.- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{áng tang} \frac{u}{a} + c$

15.- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{áng sec} \frac{u}{a} + c$

INTEGRACION POR MULTIPLICACION DE UN FACTOR CONSTANTE.

Si el integrando no tiene unas de las formas anteriores, se reducen (de ser posible), a una de ellas, mediante transformaciones adecuadas y luego se integra.

Una transformación consiste en multiplicar el integrando por un factor constante y por su recíproco.

a).- $e^{3x} dx$, para que el integrando sea del tipo 5,

$3x = u$

$3dx = du$

Se multiplica por 3 el integrando, por su recíproco la integral y se tiene:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,3dx = \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

b)_ $\dfrac{x^2\,dx}{2\sqrt{x^3-1}}$, que para reducirla al número 3, se hace:

$$x^3 - 1 = u$$
$$3x^2\,dx = du$$

multiplicando por 3 y por el recíproco de 3, el integrando, se tiene:

$$\int \frac{x^2\,dx}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\sqrt{u} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3-1} + c$$

INTEGRACION DE FRACCIONES POR COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Cuando el denominador sólo tiene raíces reales simples.

Si el numerador, es la diferencial de la variable y el denominador, es el producto de dos binomios lineales.

Obtener $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2}$, por coeficientes indeterminados, en donde el denominador puede descomponerse en dos factores lineales, o sea:

$$u^2 - a^2 = (u+a)(u-a)$$

póngase:

$$\frac{1}{u^2-a^2} = \frac{1}{(u+a)(u-a)} = \frac{A}{u+a} + \frac{B}{u-a}$$

, en donde A y B, son constantes a determinar.

reduciendo los dos últimos quebrados a otros equivalentes de igual denominador, se tiene:

$$\frac{A}{u+a} + \frac{B}{u-a} = \frac{Au - aA + Bu + aB}{(u+a)(u-a)} = \frac{(A+B)u - a(A-B)}{(u+a)(u-a)} = \frac{1}{u^2-a^2}$$

, de donde:

$$(A+B)u = 0 \text{ , o sea } A+B = 0 \text{ ______(1)}$$
$$-a(A-B) = 1 \text{ , o sea } -A+B = \frac{1}{a} \text{ ____(2)}$$

de donde:

$$A = -\frac{1}{2a} \quad ; \quad B = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int -\frac{du}{u+a} + \int \frac{du}{u-a}\right] = \frac{1}{2a}\left[-L(u+a) + L(u-a)\right] = \frac{1}{2a}L\frac{u-a}{u+a} + c$$

INTEGRACION DE FRACCIONES CUYO DENOMINADOR TIENE UNA RAIZ MULTIPLE.

Si el integrando como denominador, tiene raíces simples, multiples y complejas, debido a la presencia de un trinomio que tiene esta clase de raíces, se hace, por lo que se refiere a las dos primeras raíces, según se indicó, como si no hubiera otra clase de raíces y se le suma — a las primeras raíces otra cuyo denominador sea el trinomio y tenga por numerador un binomio de la forma $Ax+B$.

INTEGRACION POR PARTES.

Tiene por objeto encontrar la función primitiva de un producto; el de una función por la diferencial de otra función de la misma variable.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

teniendo en cuenta que v, es la integral de dv.

La integral del producto de una función u por la diferencial dv de otra, es igua a la función por la integral de la diferencial, menos la integral del producto de la integral obtenida, por la diferencial de la función.

INTEGRACION POR SUSTITUCION.

Consiste en remplazar la variable de integración o una expresión que la contenga, por otra variable o una función de otra variable, transformándose, por la sustitución, el integrando en otro tipo ya conocido o de más fácil integración.

Por medio de estas líneas, hago patente mi agradecimiento por la ayuda que en la reali_
zación de este manual, prestaron los señores MARIO SAUL RUIZ y ENRIQUE TEUFFER, en la revisión cuidadosa de cada uno de los renglones que lo forman, aportando también ideas para hacerlo más completo y comprensible.